EQUAZIONI NON OMOGENEE - METODO DELL'ANSATZ

Consideriamo

$$u'' + a u' + b u = f(t) \qquad (*)$$

Vedremo come trovare una soluzione particolare di $(*)$ nel caso in cui f abbia una forma speciale

$$f(t) = \begin{cases} t^m e^{\alpha t} \cos \omega t \\ t^m e^{\alpha t} \sin \omega t \end{cases} \qquad (\circledast)$$

con $\quad m \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\alpha \in \mathbb{R}, \quad \omega \in [0, +\infty[$.

<u>N.B.</u> se v_1 risolve $u'' + au' + bv = f_1$

e se v_2 risolve $v'' + au' + bu = f_2$

allora $v_1 + v_2$ risolve $v'' + au' + bv = f_1 + f_2$

Quindi se riusciamo a trovare soluzioni particolari di $(*)$ con f della forma $(\circledast)$, riusciamo a trovare soluzioni particolari anche con f che sia somma di funzioni di tipo $(\circledast)$.

La tecnica che si usa è quella dell'Ansatz:

se f ha la forma $(\circledast)$ si cerca una soluzione della forma

$$\psi(t) = t^s (A_m t^m + \dots + A_0) e^{\alpha t} \cos \omega t + \\ + t^s (B_m t^m + \dots + B_0) e^{\alpha t} \sin \omega t \quad .$$

dove s è la molteplicità di $\alpha + i\omega$ come zero di $P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$

Quindi $s \in \{0, 1, 2\}$.

Si calcola ψ', ψ'', si inserisce in (*) e si trovano le condizioni che devono soddisfare $A_0, \dots, A_m$, $A_1, \dots, A_m$. Si tratta quindi di risolvere un sistema lineare.

ESEMPIO

$u'' - u = \sin t - t$

$P(\lambda) = \lambda^2 - 1$; gli zeri sono ± 1

Consideriamo separatamente

$u'' - u = \sin t$ (a)

$u'' - u = t$ (b)

per a) $f_1(t) = \sin t = t^0 e^{0t} \sin t$

quindi $m = 0$, $\alpha = 0$ $\omega = 1$

$\alpha + i\omega$ ha molteplicità 0 come zero di $P(\lambda)$, quindi $s = 0$

L'ansatz quindi è $\psi_1(t) = A \sin t + B \cos t$

Si ha:

$$\psi_1' = A\cos t - B\sin t \qquad \psi_1'' = -A\sin t - B\cos t$$

Deve essere

$$-A\sin t - B\cos t \; -A\sin t - B\cos t = \sin t$$

$$-2A\sin t - 2B\cos t = \sin t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2A = 1 \\ -2B = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \psi_1(t) = -\frac{1}{2}\sin t$$

Per (b) $\quad f_2(t) = -t = -t^1 e^{0t}\cos 0t$

$$m = 1, \quad \alpha = 0, \quad \omega = 0, \quad s = 0$$

L'Ansatz è $\quad \psi_2(t) = A_1 t + A_0$

$\psi' = A_1 \qquad \psi_2 = 0$

Deve essere

$$-(A_1 t + A_0) = t \quad \Rightarrow \quad A_0 = 0, \; A_1 = -1$$

$$\Rightarrow \quad \psi_2(t) = -t$$

Infine $\quad \psi(t) = \psi_1 - \psi_2 = -\frac{1}{2}\sin t + t$

La soluzione generale quindi è:

$$u(t) = k_1 e^{t} + k_2 e^{-t} - \frac{1}{2}\sin t + t.$$

Oscillazioni SMORZATE CON TERMINE FORZANTE

$$u'' + 2\gamma u' + \omega_0^2 u = \cos\omega_1 t \qquad \gamma \geq 0 \quad \omega_0 > 0 \quad \omega_1 > 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2$$

$$f(t) = \cos\omega_1 t = t^0 e^{0t}\cos\omega_1 t \qquad m=0 \quad \alpha=0 .$$

1) se $\gamma > 0$ le radici di $P(\lambda)$ sono:

•) $-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}$ se $\gamma > \omega_0$

•) $-\gamma$ se $\gamma = \omega_0$

•) $-\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}$ se $\gamma < \omega_0$

Quindi in questo caso $s=0$

L'Ansatz allora è $\psi(t) = A\cos\omega_1 t + B\sin\omega_1 t$

Si ha $\psi' = -A\omega_1 \sin\omega_1 t + B\omega_1\cos\omega_1 t$

$\psi'' = -A\omega_1^2\cos\omega_1 t - B\omega_1^2 \sin\omega_1 t$

Da cui

$$\begin{cases} -A\omega_1^2 + 2\gamma B\omega_1 + \omega_0^2 A = 1 \\ -B\omega_1^2 - 2\gamma A\omega_1 + \omega_0^2 B = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\omega_0^2-\omega_1^2)A + 2\gamma\omega_1 B = 1 \\ -2\gamma\omega_1 A + (\omega_0^2-\omega_1^2)B = 0 \end{cases}$$

Si risolve per A e B. La soluzione esiste ed è unica poiché

$$\det \begin{pmatrix} \omega_0^2-\omega_1^2 & 2\gamma\omega_1 \\ -2\gamma\omega_1 & \omega_0^2-\omega_1^2 \end{pmatrix} = (\omega_0^2-\omega_1^2)^2 + 4\gamma^2\omega_1^2 > 0$$

perché $\gamma > 0 \wedge \omega_1 > 0$

La soluzione generale allora è

$$\begin{cases} u(t) = (k_1 \cos\omega t + k_2 \sin\omega t)e^{-\gamma t} + A\cos\omega_1 t + B\sin\omega_1 t \\ \text{con } \omega = \sqrt{\omega_0^2-\gamma^2} \\ \text{quando } \omega_0 > \gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(t) = k_1 e^{(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2})t} + k_2 e^{(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2})t} + \\ \qquad + A\cos\omega_1 t + B\sin\omega_1 t \\ \text{quando } \omega_0 < \gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(t) = (k_1 + k_2 t)e^{-\gamma t} + A\cos\omega_1 t + B\sin\omega_1 t \\ \text{quando } \omega_0 = \gamma \end{cases}$$

In ogni caso "a regime" la soluzione oscilla con frequenza ω_1.

2) se $\gamma = 0$ (no attrito)

le radici di $P(\lambda)$ sono $\pm i\omega_0$

L'Ansatz è $\psi(t) = t^s(A\cos\omega_1 t + B\sin\omega_1 t)$

dove $s = \begin{cases} 0 & \text{se } \omega_1 \neq \omega_0 \\ 1 & \text{se } \omega_1 = \omega_0 . \end{cases}$

•) Se $\omega_1 \neq \omega_0$ si ha

$$\psi = A\cos\omega_1 t + B\sin\omega_1 t$$

$$\psi' = -A\omega_1 \sin\omega_1 t + B\omega_1 \cos\omega_1 t$$

$$\psi'' = -A\omega_1^2 \cos\omega_1 t - B\omega_1^2 \sin\omega_1 t$$

si ha

$$\begin{cases} -A\omega_1^2 + A\omega_0^2 = 1 \\ -B\omega_1^2 + B\omega_0^2 = 0 \end{cases}$$

da cui $A = \dfrac{1}{\omega_0^2 - \omega_1^2}$, $B = 0$

La soluzione generale quindi è

$$u(t) = K_1 \cos\omega_0 t + K_2 \sin\omega_0 t + \frac{1}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \cos\omega_1 t$$

Sovrapposizione di due oscillazioni con frequenze diverse.
Se ω_0 e ω_1 sono commensurabili,
ho un comportamento periodico.
Altrimenti ho un comportamento caotico.

•) Se $\omega_1 = \omega_0$ si ha $s = 1$, quindi
l'Ansatz è

$$\psi(t) = t\,(A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t)$$

si ha

$$\psi' = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + t(-A\omega_0 \sin\omega_0 t + B\omega_0\cos\omega_0 t)$$

$$\psi'' = -A\omega_0\sin\omega_0 t + B\omega_0\cos\omega_0 t - A\omega_0\sin\omega_0 t + B\omega_0\cos\omega_0 t + t(-A\omega_0^2\sin\omega_0 t - B\omega_0^2\cos\omega_0 t)$$

Allora deve essere

$$\begin{cases} -2A\omega_0 = 0 \\ 2B\omega_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} A=0 \\ B = \dfrac{1}{2\omega_0} \end{array}$$

La soluzione generale allora è

$$u(t) = K_1\cos\omega_0 t + K_2\sin\omega_0 t + \underbrace{\frac{t}{2\omega_0}\cos\omega_0 t}_{\text{amplificazione che tende a } +\infty \text{ per } t\to+\infty.}$$

Questo fenomeno si dice "RISONANZA".