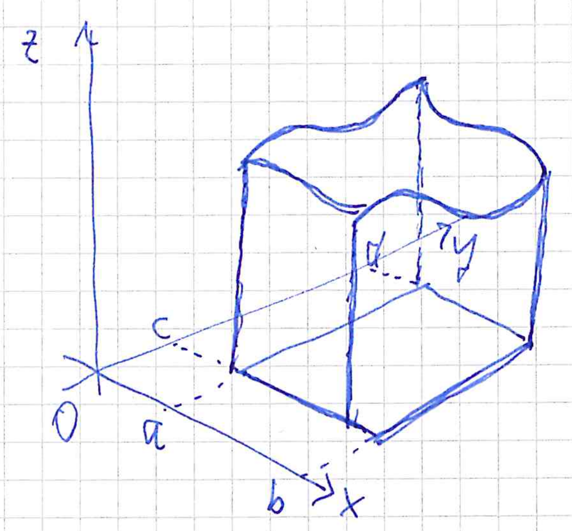
INTEGRALI MULTIPLI

Illustriamo la definizione e le proprietà nel caso di una funzione $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
Il caso generale è analogo.

Sia $R \subseteq \mathbb{R}^2$ un rettangolo, $R = [a,b] \times [c,d]$
Sia $f : R \to \mathbb{R}$ limitata e positiva (per il momento). Vogliamo dare un senso e calcolare il volume del sottografico di f.

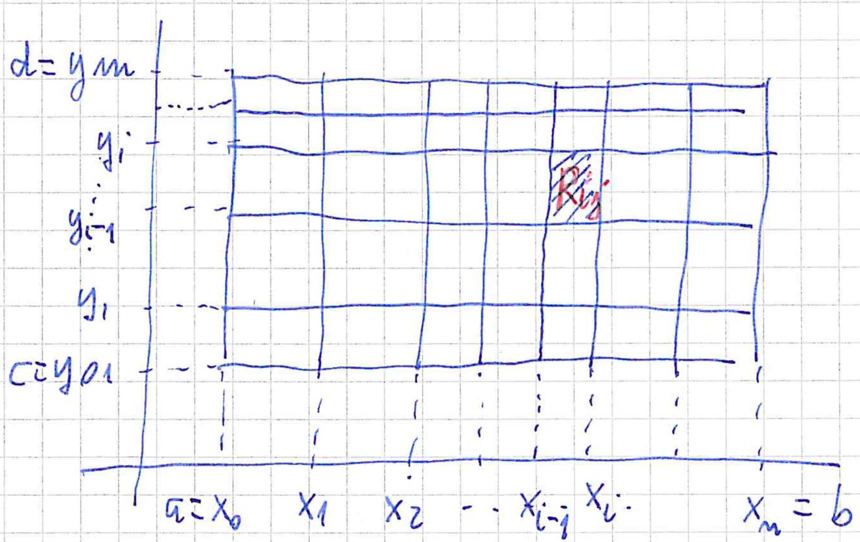


L'idea è simile a quella per definire l'area di un sottografico per $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, e la definizione vale anche se f non è ≥ 0.

Definiamo un "tassellamento" T di R in questo modo.
Sia $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partizione di $[a,b]$ e sia $S := \{y_0, y_1, \dots, y_m\}$ una partizione di $[c,d]$.

Definiamo $T := P \times S$.

Il tassellamento $T = \{ (x_i, y_j) \mid i=1,\dots,n;\ j=1,\dots,m \}$ induce una suddivisione di R in rettangoli $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$



Diremo che T è più fine di $\tilde{T}$ $\Leftrightarrow$ $T = P \times S$, $\tilde{T} = \tilde{P} \times \tilde{S}$ e $\tilde{P} \subseteq P \wedge \tilde{S} \subseteq S$.

È facile verificare che date $T_1 = P_1 \times S_1$ $T_2 = P_2 \times S_2$, allora $T = (P_1 \cup P_2) \times (S_1 \cup S_2)$ è più fine di entrambe.

Sia ora $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata

Sia T un tassellamento di R, e sia $|R_{ij}| := (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ (ovvero l'area di R_{ij}).

$m_{ij} = \inf_{R_{ij}} f$ $\qquad M_{ij} = \sup_{R_{ij}} f$

Definiamo le somme di Riemann inferiore e superiore

$$L(f,T) := \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij}|R_{ij}|$$

$$U(f,T) := \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij}|R_{ij}|$$

Si verifica come nel caso unidimensionale che

.) $\forall T, \quad L(f,T) \leq U(f,T)$

.) Se T_1 è più fine di T_2, allora

$L(f,T_2) \leq L(f,T_1) \quad e \quad U(f,T_2) \geq U(f,T_1)$

.) $\forall\ T_1, T_2, \quad L(f,T_1) \leq U(f,T_2)$.

Si definiscono quindi l'integrale inferiore e superiore

$$\underline{I}(f,R) := \sup\{L(f,T) \mid T \text{ tassellamento di } R\}$$

$$\overline{I}(f,R) := \inf\{U(f,T) \mid T \text{ tassellamento di } R\}$$

e si ha $\quad \underline{I}(f,R) \leq \overline{I}(f,R)$.

<u>Def</u>

f si dice integrabile su $R \iff \underline{I}(f,R) = \overline{I}(f,R)$ e si scrive

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy := \underline{I}(f,R) = \overline{I}(f,R).$$

Vale il criterio di integrabilità:

PROPOSIZIONE

Sia $f: R \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata. Allora f è integrabile $\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ T tassellamento di R t.c.

$$U(f,T) - L(f,T) < \varepsilon.$$

Ripetendo in modo esatto la dimostrazione fatta in dimensione 1 si dimostra:

PROPOSIZIONE

Se $f: R \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora è integrabile.

PROPRIETÀ DELL' INTEGRALE

1) f, g integrabili $\Rightarrow$ $\alpha f + \beta g$ integrabile,

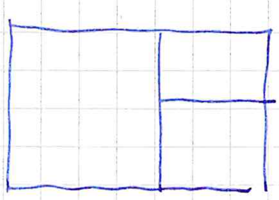
e $$\iint_R \alpha f + \beta g \, dx\,dy = \alpha \iint_R f \, dx\,dy + \beta \iint_R g \, dx\,dy$$

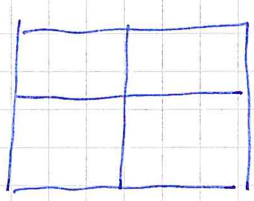
2) Se $f \leq g$ allora $\iint_R f \, dx\,dy \leq \iint_R g \, dx\,dy$

3) Se f, g sono integrabili, allora $|f|$, f^2 e fg sono integrabili.

4) $$\left| \iint_R f(x,y) \, dx\,dy \right| \leq \iint_R |f(x,y)| \, dx\,dy.$$

Più delicata la questione dell'additività, perché un rettangolo si può scomporre in vari modi





In ogni caso se il rettangolo R si scompone come unione di rettangoli

$$R = R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_k$$

tali che $\mathring{R}_i \cap \mathring{R}_j = \emptyset$, allora

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{k} \iint_{R_i} f(x,y)\,dx\,dy$$

TEOREMA DI RIDUZIONE DI FUBINI

Lo strumento principale per calcolare integrali su rettangoli è il teorema di Fubini.

TEOREMA

Sia $f : R = [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua.

$\forall\, x \in [a,b]$ sia $g(x) := \int_c^d f(x,y)\,dy$

$\forall\, y \in [c,d]$ sia $h(y) := \int_a^b f(x,y)\,dx$

Allora g e h sono continue (e quindi integrabili) e si ha che

$$\int_a^b g(x)\,dx = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy$$

e $\int_c^d h(y)\,dy = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy$

ovvero

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

$$= \iint_R f(x,y)\,dx\,dy .$$

Questo teorema permette di ridurre il calcolo di integrali doppi a calcolo di integrali semplici.

ESEMPIO

$\iint_R y\cos(xy)\,dx\,dy$ dove $R = [0,\pi] \times [1,2]$

$$\iint_R y\cos(xy)\,dx\,dy = \int_1^2 \left(\int_0^\pi y\cos(xy)\,dx \right) dy$$

$$= \int_1^2 \left[\sin(xy) \right]_{x=0}^{x=\pi} dy =$$

$$= \int_1^2 \sin(\pi y)\,dy = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi y)\Big|_1^2$$

$$= -\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} = -\frac{2}{\pi}$$

Dimostrazione del teorema di riduzione

Dimostriamo che $g(x)$ e $h(y)$ sono continue.

Poiché $f(x,y)$ è continua e $R=[a,b]\times[c,d]$ è compatto, allora $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ $\forall (x_1,y_1), (x_2,y_2) \in R$ $|x_1-x_2|+|y_1-y_2|<\delta$
$\rightarrow |f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon$

Allora

$$\left|\int_a^b f(x,y_1)\,dx - \int_a^b f(x,y_2)\,dx\right| \leq$$

$$\leq \int_a^b |f(x,y_1)-f(x,y_2)|\,dx \leq \varepsilon(b-a).$$

$\hookrightarrow$ se $|y_1-y_2|<\delta$

$\Rightarrow$ $h(y)$ è continua.

Analogamente dimostriamo che $g(x)$ è continua.

Sia ora $T=P\times S$ una tassellazione di R

$P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$, $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$

$S=\{y_0,y_1,\dots,y_m\}$, $c=y_0<y_1<\dots<y_m=d$

Utilizzando il teorema della media, si ha:

$$\int_a^b g(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} g(\bar{x}_i)(x_i-x_{i-1})$$

con $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$

ora si ha, sempre per il teorema della media

$$g(\bar{x}_i) = \int_c^d f(\bar{x}_i, y)\,dy = \sum_{j=1}^{m} \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\bar{x}_i, y)\,dy =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} f(\bar{x}_i, \bar{y}_{ij})\,(y_j - y_{j-1})$$

con $\bar{y}_{ij} \in [y_{j-1}, y_j]$

Allora

$$\int_a^b g(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\bar{x}_i, \bar{y}_{ij})\,(y_j - y_{j-1})\,(x_i - x_{i-1})$$

poiché $m_{ij} \leq f(\bar{x}_i, \bar{y}_{ij}) \leq M_{ij} \quad \forall\, ij$,

si ha $L(f,T) \leq \int_a^b g(x)\,dx \leq U(f,T)$

per qualunque tassellamento T.

Segue che $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy$

Analoga dimostrazione per $\displaystyle\int_c^d h(y)\,dy$

$\blacksquare$

Il teorema di Fubini si può estendere a <u>tutte le funzioni integrabili</u>

(la dimostrazione è più complicata).