

Baricentri e momenti di inerzia

Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ un corpo piano avente densità di massa $\rho = \rho(x, y)$. Indichiamo con $m = m(D)$ la sua massa e con $C(x_C, y_C)$ il suo baricentro. Si ha

$$m = \iint_D \rho(x, y) dx dy$$

$$x_C = \frac{1}{m(D)} \iint_D x \rho(x, y) dx dy, \quad y_C = \frac{1}{m(D)} \iint_D y \rho(x, y) dx dy$$

Il momento di inerzia rispetto a una retta r è dato da

$$I = \iint_D \delta^2(x, y) \rho(x, y) dx dy,$$

dove δ rappresenta la distanza dalla retta r . Indicando con I_x , I_y e I_0 i momenti d'inerzia rispetto all'asse x , all'asse y e all'asse z (immaginando il dominio piano immerso nello spazio euclideo \mathbb{R}^3), si ha

$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x, y) dx dy, \quad I_y = \iint_D x^2 \rho(x, y) dx dy,$$

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) dx dy, \quad I_0 = I_x + I_y.$$

Similmente, per un corpo materiale $D \subset \mathbb{R}^3$, si ha, con le ovvie, analoghe notazioni,

$$m = \iiint_D \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$x_C = \frac{1}{m(D)} \iiint_D x \rho(x, y, z) dx dy dz, \quad y_C = \frac{1}{m(D)} \iiint_D y \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

$$z_C = \frac{1}{m(D)} \iiint_D z \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

$$I_x = \iiint_D (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz, \quad I_y = \iiint_D (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

$$I_z = \iiint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dx dy dz$$

Se $D \subset \mathbb{R}^2$ è omogeneo ($\rho \equiv \rho_0$) si ha semplicemente

$$m = \rho_0 \cdot \text{area}(D);$$

$$x_C = \frac{1}{\text{area}(D)} \iint_D x dx dy, \quad y_C = \frac{1}{\text{area}(D)} \iint_D y dx dy,$$

e similmente, se $D \subset \mathbb{R}^3$,

$$m = \rho_0 \cdot \text{vol}(D);$$

$$x_C = \frac{1}{\text{vol}(D)} \iiint_D x dx dy dz, \quad y_C = \frac{1}{\text{vol}(D)} \iiint_D y dx dy dz,$$

$$z_C = \frac{1}{\text{vol}(D)} \iiint_D z dx dy dz.$$

Se D non rappresenta un corpo materiale, ma solo una regione piana o un solido si definisce centroide o baricentro di D il baricentro del corrispondente corpo materiale avente densità di massa costante, ad esempio uguale a 1.