

INTEGRALI SU CURVE

Sia  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva regolare.  
Ricordiamo che ciò significa che  $\gamma$  è di classe  $C^1$  (o  $C^1$  a tratti), con  $\gamma'(t) \neq 0 \forall t$ , e  $\gamma$  è iniettiva (nonne eventualmente il caso in cui  $\gamma(a) = \gamma(b)$  (curve chiuse)).

Abbiamo definito le "ripereparametrizzazioni" di  $\gamma$  ovvero le funzioni  $\varphi: [a', b'] \rightarrow [a, b]$  di classe  $C^1$  con  $\varphi'(t) \neq 0 \forall t$ , strettamente crescenti o strettamente decrescenti, con cui definire le curve ripereparametrizzate  $\gamma \circ \varphi$ . Se  $\varphi' > 0$  la ripereparametrizzazione conserva il verso di percorrenza, e  $\varphi' < 0$  la ripereparametrizzazione lo inverte.

Possiamo identificare equivalenti le curve ottenute una dall'altra tramite una ripereparametrizzazione che ne conserva il verso.

Indichiamo con  $\mathcal{C} = [\gamma] := \{ \tilde{\gamma}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ curve equivalenti a } \gamma \}$

una classe di equivalenza di curve tutte equivalenti fra loro, e con  $-\mathcal{C}$  la corrispondente classe di equivalenza delle curve di  $\mathcal{C}$  con verso di percorrenza invertito.

(174)  
Per una curva  $\gamma$  abbiamo definito la  
sua lunghezza e abbiamo visto che  $\gamma$   
è regolare si ha

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

La lunghezza non dipende dalla parametrizzazione, per cui ha senso parlare della lunghezza di una classe di equivalenza di curve equivalenti  $\Gamma \in \mathcal{C}$ ,  $l(\mathcal{C})$ .

Abbiamo definito la riparametrizzazione  
con la lunghezza d'arco, ovvero detta

$$\sigma(t) := \int_a^t \|\gamma'(p)\| dp, \quad \sigma: [a, b] \rightarrow [0, l(\gamma)], \text{ e}$$

per  $\sigma^{-1}: [0, l(\gamma)] \rightarrow [a, b]$  la sua inversa,

definiamo  $\tilde{\gamma}(s) := \gamma(\sigma^{-1}(s))$ .

Abbiamo visto che  $\|\tilde{\gamma}'(s)\| = 1 \quad \forall s$ .

## INTEGRALI DI LINEA DI PRIMO TIPO

Sia  $\mathcal{C}$  una classe di equivalenza di  
curve equivalenti  $\Gamma \in \mathcal{C}$ . Sia

$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una parametrizzazione.

Sia  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua.

$\Gamma =$  traiettoria di  $\gamma = \{\gamma(t) \mid t \in [a, b]\}$ .

Definiamo l'integrale di linea di primo tipo

$$\int_{\mathcal{C}} f(s) ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$

È facile vedere che non dipende dalla particolare parametrizzazione, e che

$$\int_{-\mathcal{C}} f(s) ds = - \int_{\mathcal{C}} f(s) ds$$

ESEMPLI

1) Dato un filo materiale descritto da una curva regolare  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  con densità lineare  $\rho: \gamma^* \rightarrow [0, +\infty[$

ha massa sul filo  $\mathcal{C}$   
 $m(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} \rho(s) ds = \int_a^b \rho(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$

Il suo baricentro  $C = (x_c, y_c, z_c)$  ha coordinate

$$m(\mathcal{C}) \cdot x_c = \int_{\mathcal{C}} x(s) \rho(s) ds = \int_a^b x_1(t) \rho(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$

$$m(\mathcal{C}) \cdot y_c = \int_{\mathcal{C}} y(s) \rho(s) ds = \int_a^b y_2(t) \rho(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$

$$m(\mathcal{C}) \cdot z_c = \int_{\mathcal{C}} z(s) \rho(s) ds = \int_a^b x_3(t) \rho(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$

I momenti d'inerzia rispetto agli assi

sono

$$I_x = \int_C (y(s)^2 + z(s)^2) \rho(s) ds$$

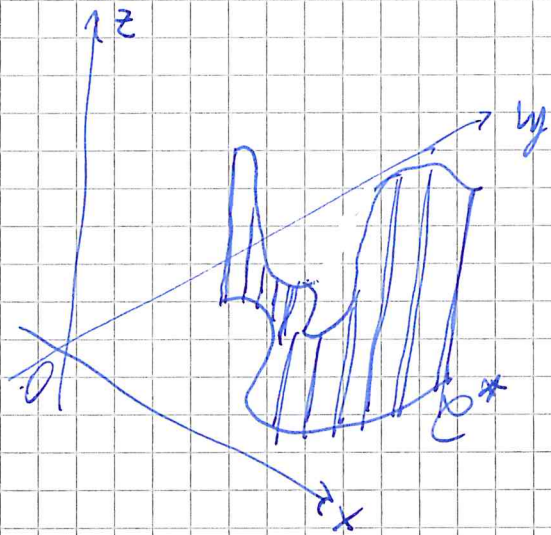
$$I_y = \int_C (x(s)^2 + z(s)^2) \rho(s) ds$$

$$I_z = \int_C (x(s)^2 + y(s)^2) \rho(s) ds.$$

2) Sia  $C$  una curva piana e

sia  $f: C^* \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \geq 0$

sia  $\Sigma := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in C^*, 0 \leq z \leq f(x, y) \}$



allora  $Area(\Sigma) = \int_C f(s) ds.$

ESEMPIO

Calcolare il baricentro dell'arco di elica

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t) \quad t \in [0, 2\pi], \text{ su } \rho \equiv 1$$

si ha

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1) \text{ da cui}$$

$$\|\gamma'(t)\| = \sin^2 t + \cos^2 t + 1 = 2 \Rightarrow m = 4\pi$$

Allora

$$4\pi x_c = \int_0^{2\pi} \cos t \cdot 2 dt = 2 \sin t \Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$4\pi y_c = \int_0^{2\pi} \sin t \cdot 2 dt = -2 \cos t \Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$4\pi z_c = \int_0^{2\pi} t \cdot 2 dt = t^2 \Big|_0^{2\pi} = 4\pi^2$$

$$\Rightarrow C = (0, 0, \pi)$$

(178)

CAMPI VETTORIALI

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . Si dice campo scalare su  $\Omega$  una funzione  $V: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  regolare ( $C^1, C^2, \dots$ ).

Si dice campo vettoriale su  $\Omega$  una funzione  $E: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  regolare ( $C^1, C^2, C^3, \dots$ ),  $E = (E_1, \dots, E_n)$

ESEMPI

In  $\mathbb{R}^3$  la temperatura è un campo scalare. Altri esempi sono il potenziale elettrico, la pressione, la densità.

Esempi di campo vettoriale sono il campo gravitazionale, il campo elettrostatico; Il campo di velocità di un fluido in movimento.

OSS.

Se  $V: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  è un campo scalare, allora  $\nabla V: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\nabla V = \left( \frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right)$$

è un campo vettoriale.

Esempi: gradiente di pressione, gradiente di temperatura.

PROBLEMA :

Dato un campo vettoriale  $E: \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  
esiste un campo scalare  $V$  t.c.  $E = \nabla V$ ?

ovvero t.c.  $E_i = \frac{\partial V}{\partial x_i}$  ,  $i=1, \dots, n$  ?

Si tratta della generalizzazione del problema  
della primitivazione per funzioni da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$ .

In generale la risposta è negativa.

Esempio

in  $\mathbb{R}^2$ ,  $E(x,y) = (-y, x)$

Se  $\exists V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  t.c. c.

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -y \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = x$$

allora

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} = -1 \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 1$$

controponendo il Teorema di Schwarz.

DEFINIZIONE

Un campo vettoriale  $E: \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

è detto CONSERVATIVO  $\Leftrightarrow \exists V: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

t.c.  $E = \nabla V$ .

In tale caso, si dice che  $\vec{E}$  è conservativo e  $V$  si dice potenziale di  $\vec{E}$ .

Esempio

Il campo gravitazionale in  $\mathbb{R}^3$

$$\vec{E}(x, y, z) = \left( \frac{-GMx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{-GM y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{-GMz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right)$$

ammette il potenziale

$$V(x, y, z) = - \frac{GM}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$$

CONDIZIONI NECESSARIE AFFINCHÉ un

campo  $\vec{E}$  sia conservativo

anziché al teor. di Schur, ,

•) in  $\mathbb{R}^2$  se  $\vec{E} = (E_1, E_2)$  è conservativo,

allora  $\frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} = 0$

formalmente  $\det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & E_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & E_2 \end{pmatrix} = 0$

o anche  $\left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \wedge (E_1, E_2, 0) = (0, 0, 0)$

per cui si scrive  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$

•) In  $\mathbb{R}^3$  se  $\vec{E} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \vec{E} = (E_1, E_2, E_3)$

allora  $\frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} = 0$  ,



$$\frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3} = 0,$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{\partial E_3}{\partial x_1} = 0$$

Definendo quindi

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \times (E_1, E_2, E_3) \\ &= \left( \frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3}, -\left( \frac{\partial E_3}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_3} \right), \frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} \right) \end{aligned}$$

si ha due condizioni necessarie affinché  $\vec{E}$  sia conservativo e che  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ .

INTEGRALE DI LINEA DI SECONDA SPECIE

sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto, sia  $E: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vettoriale (regolare) e sia  $\gamma$  una curva regolare in  $\Omega$ ,

Definiamo

$$\int_{\gamma} E(s) \cdot \tau(s) ds = \int_a^b E(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt$$

dove  $\gamma: [a, b]$  è una parametrizzazione di  $\gamma$ , e

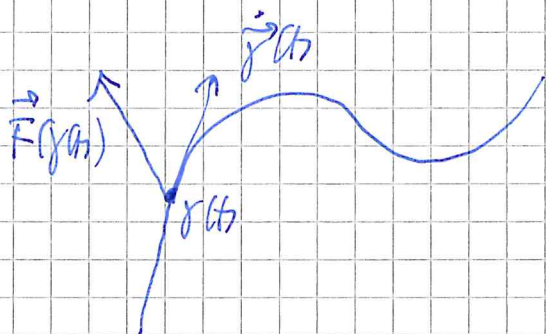
$\tau(\gamma(t)) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$  è il vettore unitario tangente a  $\gamma$  in  $s = \gamma(t)$

## ESEMPIO

(182)

Se  $E$  è una forza, allora

$\int_C E(s) \cdot \vec{r}(s) ds$  rappresenta il lavoro di tale forza su un oggetto che si muove sulla curva  $C$ .



In un intervallo di tempo  $\Delta t$  lo spostamento è  $\Delta \vec{r} = \dot{\vec{r}}(t) \Delta t$

e il lavoro è  $\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} \Delta t$

Così il lavoro è

$$\int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt = \int_C \vec{F}(s) \cdot \vec{r}(s) ds$$

N.B.

Cambiando parametrizzazione della curva l'integrale di linea non cambia se la riparametrizzazione mantiene il verso di percorrenza, mentre diventa opposto se inverte il verso di percorrenza.

ESEMPIO

sia  $E: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\vec{E}(x,y) = (y^2, 2xy)$$

sia  $\gamma(t) = (t, t^2) \quad t \in [0, 1]$

e sia  $\mathcal{C}$  la curva (classe di equivalenza) corrispondente (arco di parabola).

allora

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{E}(s) \cdot \vec{c}(s) ds = \int_0^1 ((t^2)^2, 2t \cdot t^2) \cdot (1, 2t) dt$$

$$= \int_0^1 (t^4 + 4t^4) dt = 5 \int_0^1 t^4 dt = 1$$

TEOREMA

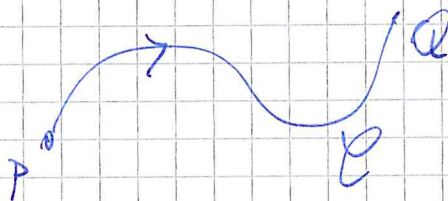
sia  $E: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo conservativo con potenziale  $V$ .

sia  $\mathcal{C}$  una curva regolare in  $\Omega$  e

sia  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una sua parametrizzazione.

Indichiamo con  $P = \gamma(a)$ ,  $Q = \gamma(b)$ .

Allora 
$$\int_{\mathcal{C}} E(s) \cdot \vec{c}(s) ds = V(Q) - V(P)$$



Dim.

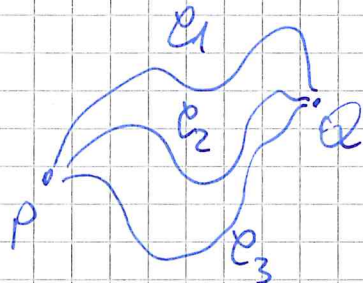
$$\int_a^b E(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b \nabla V(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt =$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} V(\gamma(t)) dt = V(\gamma(b)) - V(\gamma(a)) =$$

$$= V(Q) - V(P) \quad \square$$

In particolare quindi

$\int_{\mathcal{C}} E(s) \cdot z(s) ds$  dipende solo dal punto iniziale e dal punto finale di  $\mathcal{C}$



$$\int_{\mathcal{C}_1} E(s) \cdot z(s) ds = \int_{\mathcal{C}_2} E(s) \cdot z(s) ds = \int_{\mathcal{C}_3} E(s) \cdot z(s) ds.$$

In particolare se  $\mathcal{C}$  è una curva chiusa,

$$\oint_{\mathcal{C}} E(s) \cdot z(s) ds = 0.$$

(185)

Vediamo ora che vale il viceversa. Se  $E: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  è un campo vettoriale tale che

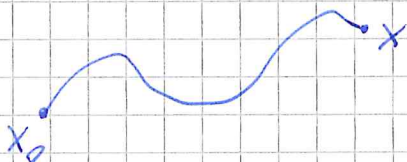
$$\oint_{\gamma} E(s) \cdot z(s) ds = 0 \quad \forall \text{ curve regolari chiuse, } \gamma$$

allora  $E$  è conservativo, ovvero ammette un potenziale.

Si fa  $0 \leq t \leq 1$ . Fissiamo  $x_0 \in \Omega$

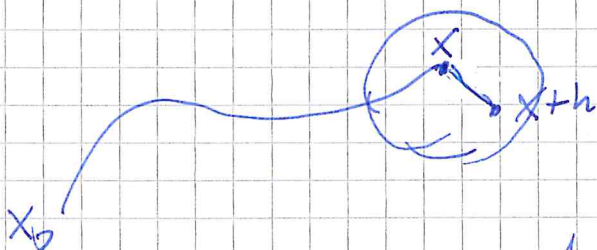
$$\text{e definiamo } V(x) := \int_{\gamma(x_0, x)} E(s) \cdot z(s) ds$$

dove  $\gamma(x_0, x)$  è una qualunque curva che unisce  $x_0$  e  $x$



La definizione non è ambigua perché l'integrale non dipende dalla particolare curva.

Ora se  $h \in \mathbb{R}^n$  è piccolo,



$$\text{Si ha } V(x+h) - V(x) = \int_0^1 E(x+th) \cdot h dt$$

(ho scelto di spostarmi da  $x$  a  $x+h$  in linea retta,  $\gamma(t) = x+th$ ,  $t \in [0, 1]$ )

Allora

186

$$\frac{V(x+h) - V(x) - E(x) \cdot h}{\|h\|} = \frac{1}{\|h\|} \int_0^1 [E(x+th) - E(x)] \cdot h \, dt$$

$\Rightarrow$

$$\left| \frac{V(x+h) - V(x) - E(x) \cdot h}{\|h\|} \right| \leq \frac{1}{\|h\|} \int_0^1 \|E(x+th) - E(x)\| \|h\| \, dt$$

$$\xrightarrow{\|h\| \rightarrow 0} 0$$

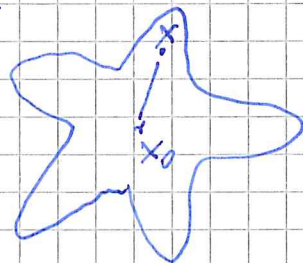
Quindi  $\nabla V(x) = E(x)$   $\square$

Abbiamo visto che una condizione "locale" necessaria affinché  $E$  sia conservativo è che  $\frac{\partial E_i}{\partial x_j} = \frac{\partial E_j}{\partial x_i} \quad \forall i, j$

Ci diremo se tale condizione sia anche sufficiente. La risposta in generale è no, e dipende dalla geometria di  $\Omega$ .

Def.

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  si dice "stellato" rispetto a un suo punto  $x_0 \Leftrightarrow \forall x \in \Omega$ , il segmento che unisce  $x_0$  e  $x$  è tutto contenuto in  $\Omega$



(oss.: un anello è stellato rispetto a ogni suo punto).

### TEOREMA DI POINCARÉ

Sia  $\Omega$  stellato rispetto a  $x_0$ . Sia  $E: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vettoriale t.c.

$$\frac{\partial E_i}{\partial x_j} = \frac{\partial E_j}{\partial x_i} \quad \forall i, j$$

Allora  $\exists V: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  t.c.  $\nabla V = E$

Dim.

$\forall x \in \Omega$  sia  $\gamma_x: [0, 1] \rightarrow \Omega$   $\gamma_x(t) = x_0 + t(x - x_0)$

e sia

$$\begin{aligned} V(x) &:= \int_{\gamma_x} E(s) \cdot \tau(s) ds = \int_0^1 E(x_0 + t(x - x_0)) \cdot (x - x_0) dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n E_i(x_0 + t(x - x_0)) (x_i - x_{0i}) dt \end{aligned}$$

si ha

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x_j} = \int_0^1 \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial E_i}{\partial x_j}(x_0 + t(x - x_0)) t(x_i - x_{0i}) + E_j(x_0 + t(x - x_0)) \right] dt$$

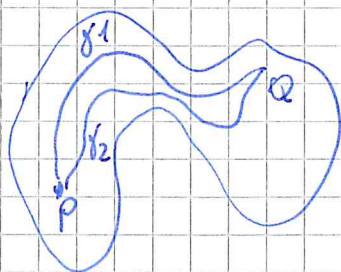
$$= \int_0^1 t \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial E_j}{\partial x_i}(x_0 + t(x - x_0)) (x_i - x_{0i}) + E_j(x_0 + t(x - x_0)) \right] dt$$

$$= \int_0^1 \left[ t \frac{d}{dt} E_j(x_0 + t(x - x_0)) + E_j(x_0 + t(x - x_0)) \right] dt =$$

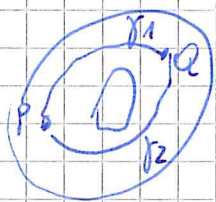
$$= t E_j(x_0 + t(x-x_0)) \Big|_0^1 = E_j(x) \quad \square$$

Oss.

Il teorema vale in domini più generali, i cosiddetti domini semplicemente connessi (sono i domini in cui date due curve che congiungono  $P$  e  $Q$  può deformare una fino a trasformarla nell'altra, senza uscire da  $\Omega$ )



semplicemente connesso



non semplicemente connesso.

ESEMPIO di un campo con  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$  ma non conservativo (globalmente).

$$\vec{B} := \left( -\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right) \text{ in } \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

$$\frac{\partial B_1}{\partial y} = -\frac{(x^2+y^2) - y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial B_2}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2) - x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$$



Quindi  $\vec{V} \times \vec{B} = 0$ , ma

$$\oint_{\{x^2+y^2=1\}} \vec{B}(s) \cdot \vec{T}(s) ds = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt$$

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

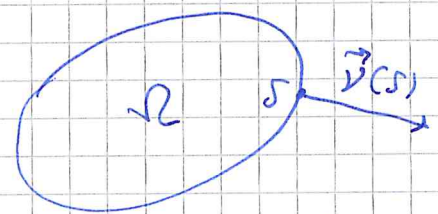
$$= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi \neq 0$$

Quindi  $\vec{B}$  non può essere conservativo su tutto  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ .

190

# TEOREMA DI GREEN NEL PIANO

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  aperto connesso con frontiera regolare  $\partial\Omega$ , e sia  $\vec{v}(s) = (v_1(s), v_2(s))$  il vettore normale a  $\partial\Omega$  in  $s \in \partial\Omega$ , che punta verso l'esterno.



Sia  $f: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  regolare

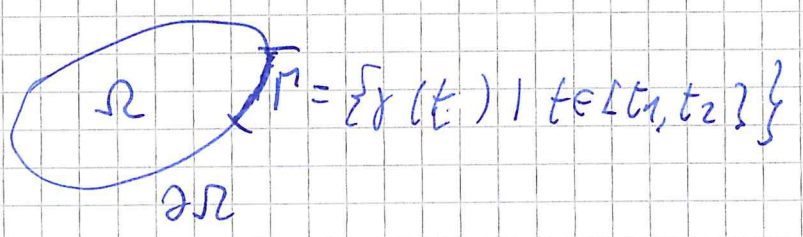
Allora

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) dx dy = \int_{\partial\Omega} f(s) v_2(s) ds \quad (1)$$

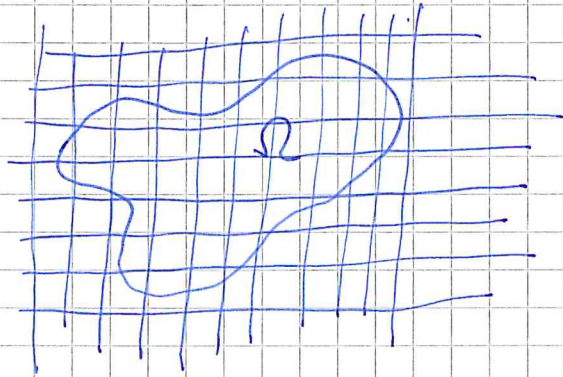
$$\iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) dx dy = \int_{\partial\Omega} f(s) v_1(s) ds \quad (2)$$

dove per una parametrizzazione  $\gamma(t)$  di un pezzo  $\Gamma$  di  $\partial\Omega$  si è definito

$$\int_{\Gamma} g(s) ds \stackrel{\text{def.}}{=} \int_{t_1}^{t_2} g(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$

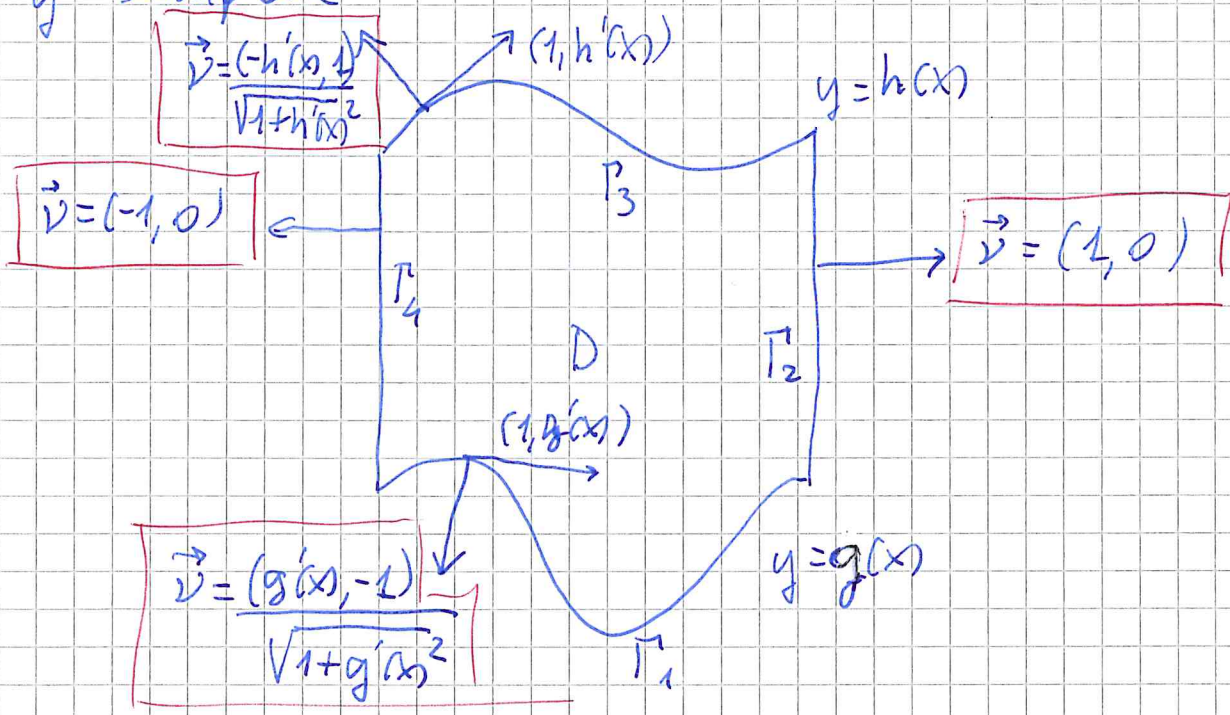


Dimostriamo prima (1) e (2) per un dominio  $D$   $y$ -semplice (per simmetria quindi saranno vere anche per un dominio  $x$ -semplice). Il caso generale si ottiene quindi "incollando" i risultati "locali".



$\Omega$  è decomponibile in insiemi  $x$ -semplici o  $y$ -semplici.

Consideriamo quindi un dominio  $y$ -semplice



$$\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$$

Osservazione preliminare.

Sia  $\varphi(x, y)$  una funzione regolare,  
e sia

$$G(x, \alpha, \beta) := \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x, y) dy$$

allora

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x, \alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) dy$$

$$\frac{\partial G}{\partial \alpha}(x, \alpha, \beta) = -\varphi(x, \alpha)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \beta}(x, \alpha, \beta) = \varphi(x, \beta)$$

da cui, se  $\alpha(x)$  e  $\beta(x)$  sono regolari,

$$\frac{d}{dx} G(x, \alpha(x), \beta(x)) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) dy$$

$$+ \varphi(x, \beta(x)) \beta'(x)$$

$$- \varphi(x, \alpha(x)) \alpha'(x).$$

Ora possiamo dimostrare (1)

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx dy &= \int_a^b \left( \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_a^b (f(x, h(x)) - f(x, g(x))) dx = \end{aligned}$$

$$= \int_a^b f(x, h(x)) \frac{1}{\sqrt{1+h'(x)^2}} \sqrt{1+h'(x)^2} dx +$$

$$+ \int_a^b f(x, g(x)) \frac{-1}{\sqrt{1+g'(x)^2}} \sqrt{1+g'(x)^2} dx$$

$$= \int_{\Gamma_3} f(s) v_2(s) ds + \int_{\Gamma_1} f(s) v_2(s) ds$$

$$+ \int_{\Gamma_2} f(s) v_2(s) ds + \int_{\Gamma_h} f(s) v_2(s) ds$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=0} \qquad \qquad \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{=0}$

$$= \int_{\partial D} f(s) v_2(s) ds.$$

One colocalismo (2)

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) dy \right) dx =$$

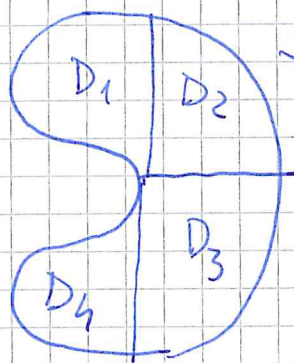
$$= \int_a^b \left( \frac{d}{dx} \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y) dy - f(x, h(x)) h'(x) + f(x, g(x)) g'(x) \right) dx$$

$$= \int_{g(b)}^{h(b)} f(b,y) dy - \int_{g(a)}^{h(a)} f(a,y) dy$$

$$+ \int_a^b f(x, h(x)) \frac{-h'(x)}{\sqrt{1+h'(x)^2}} \sqrt{1+h'(x)^2} dx$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_a^b f(x, g(x)) \frac{g'(x)}{\sqrt{1+h'(x)^2}} \sqrt{1+h'(x)^2} dx \\
 & = \int_{\Gamma_2} f(s) \nu_1(s) ds + \int_{\Gamma_4} f(s) \nu_1(s) ds + \\
 & \quad + \int_{\Gamma_3} f(s) \nu_1(s) ds + \int_{\Gamma_1} f(s) \nu_1(s) ds \\
 & = \int_{\partial D} f(s) \nu_1(s) ds.
 \end{aligned}$$

In un dominio generale  $\Omega$ , faccio una scomposizione



$$\Omega = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$$

$D_1$  e  $D_4$  sono x semplici

$D_2$  e  $D_3$  sono y semplici

nelle linee di contatto i contributi si elidono



il flusso uscente da  $D_1$  è eguale a quello uscente da  $D_2$  attraverso la linea di contatto.

In conclusione, si ha

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx dy = \int_{\partial\Omega} f(s) v_1(s) ds$$

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx dy = \int_{\partial\Omega} f(s) v_2(s) ds$$



CONSEGUENZA

Teorema della divergenza

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  regolare, sia

$\vec{F}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  un campo vettoriale regolare,  $\vec{F} = (F_1, F_2)$

Allora

$$\iint_{\Omega} \text{div } \vec{F}(x,y) dx dy = \int_{\partial\Omega} \vec{F}(s) \cdot \nu(s) ds$$

dove  $\text{div } \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}$

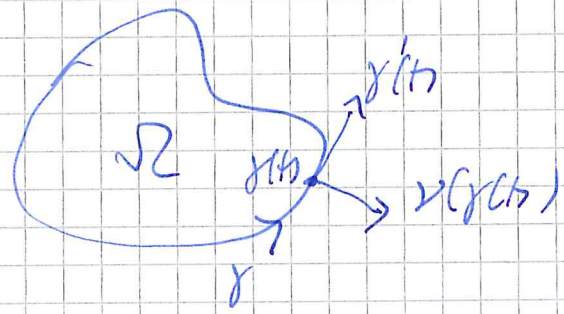
(si usa anche la notazione  $\nabla \cdot \vec{F}$ )





# TEOREMA DI STOKES NEL PIANO

Sia  $\vec{F} = (F_1, F_2)$  un campo vettoriale  
 su un aperto  $\Omega$  che ha come  
 frontiera una curva  $\gamma$ , che orientiamo  
 in senso antiorario  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$



Osserviamo che

$$\vec{\nu}(\gamma(t)) = \frac{(j_2(t), -j_1(t))}{\sqrt{j_1'(t)^2 + j_2'(t)^2}}$$

Applicando (1) e (2) si ha:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy &= \int_0^1 \frac{F_2(\gamma(t)) j_2'(t)}{\sqrt{j_1'(t)^2 + j_2'(t)^2}} \sqrt{j_1'^2 + j_2'^2} dt \\ &+ \int_0^1 \frac{-F_1(\gamma(t)) j_1'(t)}{\sqrt{j_1'(t)^2 + j_2'(t)^2}} \sqrt{j_1'^2 + j_2'^2} dt \\ &= \int_{\partial\Omega^+} \vec{F}(s) \cdot \vec{\tau}(s) ds \end{aligned}$$

dove  $\vec{\tau}(s)$  è il vettore tangente a  $\partial\Omega$   
 in  $s$   
 (\* unitario)

Si scrive anche

$$\iint_{\Omega} \vec{\nabla} \times \vec{F} \, dx \, dy = \oint_{\partial \Omega} \vec{F} \cdot \vec{T} \, ds$$

$\vec{\nabla} \times \vec{F}$  = "rotore di  $F$ "

In  $\mathbb{R}^2$   $\vec{\nabla} \times \vec{F}$  è uno scalare

Vedremo che in  $\mathbb{R}^3$   $\vec{\nabla} \times \vec{F}$  è un vettore.

In  $\mathbb{R}^2$  possiamo pensare  $\vec{\nabla} \times \vec{F}$  come un vettore ortogonale a  $\mathbb{R}^2$  pensato come immerso in  $\mathbb{R}^3$

