IL DIFFERENZIALE DI UNA FUNZIONE

Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ di classe C^1.

Abbiamo costruito la matrice Jacobiana

$$Jf(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

e abbiamo visto che, fissato $x^0 \in \Omega$, si ha in un intorno di x^0

$$f(x) = f(x^0) + \underbrace{Jf(x^0)\,(x - x^0)}_{\text{prodotto righe per colonne}} + R(x - x^0)$$

con $\dfrac{R(x - x_0)}{\|x - x^0\|} \xrightarrow{x \to x^0} 0$

$Jf(x^0)$ definisce un'applicazione lineare

$L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$$L[h] = Jf(x^0)h = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x^0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x^0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

Tale applicazione si chiama "Differenziale di f nel punto x^0" e si scrive $L = df(x^0)$

Ricapitolando: $df(x^0): \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ è un'applicazione lineare che agisce così:

$$df(x^0)[h] = Jf(x^0)\, h$$

$\longrightarrow$ prodotto righe per colonne.

Se $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$df(x^0)[h] = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0)\right)\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)\, h_i = \nabla f(x^0) \cdot h$$

Sia ora $\mathfrak{X}_i: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ l'applicazione lineare "coordinata i-esima", ovvero

se $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$,

$\boxed{\mathfrak{X}_i(x) := x_i}$ si ha che $\frac{\partial \mathfrak{X}_j}{\partial x_i}(x^0) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

si ha che allora

$$d\mathfrak{X}_i(x^0)[h] = (0, 0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{1}, 0, \dots 0)\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = h_i$$

quindi $d\mathfrak{X}_i(x^0)[h] = \mathfrak{X}_i(h)$.

Allora si ha che

$$df(x^0)[h] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} h_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)\, dx_i [h]$$

e quindi

$$df(x^0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)\, dx_i$$

Tradizionalmente (con piccolo abuso di notazione) si scrive

$$\underbrace{df(x^0)}_{\text{applicazione lineare da } \mathbb{R}^n \text{ a } \mathbb{R}} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)}_{\text{è un numero}} \underbrace{dx_i}_{\text{è il differenziale della funzione } (x_1,\dots,x_n) \mapsto x_i \text{ ed è una applicazione lineare da } \mathbb{R}^n \text{ a } \mathbb{R}}$$

al variare di x in Ω abbiamo

$$df(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, dx_i$$

la funzione

$$df : \mathbb{R}^n \longrightarrow \underbrace{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})}_{\text{applicazioni lineari da } \mathbb{R}^n \text{ a } \mathbb{R}.}$$

218

FORME DIFFERENZIALI

Sono oggetti del tipo

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \underbrace{dx_i}_{\text{applicazione lineare da } \mathbb{R}^n \text{ a } \mathbb{R}}$$

$a_i : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$\forall x$ fissato è un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$.

Quindi $\omega : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

$$\omega(x)[h] = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, dx_i[h] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, h_i = (a_1(x), \dots, a_n(x)) \cdot (h_1, \dots, h_n)$$

prodotto scalare.

c'è una identificazione naturale tra la forma differenziale $\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) dx_i$

e il campo vettoriale $\vec{a}(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x))$

Si scrive : se $\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) dx_i$

$$\omega^{\#}(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x))$$

e se $a(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x))$ è un campo vettoriale, si scrive

$$a(x)^\flat = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) dx_i .$$

Data $\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) dx_i$ è naturale chiedersi se $\exists\, f : \Omega \to \mathbb{R}$ t.c.

$$\omega(x) = df(x) \qquad \forall\, x \in \Omega .$$

Ciò equivale a trovare f t.c. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = a_i(x)$ $\forall\, x$ $\forall\, i$.

Quindi equivale a trovare un potenziale per il campo vettoriale $\omega^\#(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x))$.

Una condizione necessaria affinché esista f t.c. $\omega(x) = df(x)$ è che

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial a_j}{\partial x_i}(x) = 0 \qquad \forall\, x\ \forall\, i\ \forall\, j$$

($\Leftrightarrow \omega^\#$ è irrotazionale)

<u>Terminologia</u>

Data $\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) dx_i$

a) ω si dice esatta $\Leftrightarrow \exists\, f$ t.c. $\omega(x) = df(x)$

b) ω si dice chiusa $\Leftrightarrow \frac{\partial a_i}{\partial x_j} - \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \equiv 0$.

Quindi esatta $\Rightarrow$ chiusa ma in generale non vale l'implicazione inversa.

INTEGRALE DI UNA FORMA DIFFERENZIALE LUNGO UNA CURVA

Sia $\omega : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ una forma differenziale e sia $\mathcal{C}$ una curva regolare in Ω, parametrizzata da $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Definiamo

$$\int_{\mathcal{C}} \omega = \int_{\mathcal{C}} a_1(x)dx_1 + \dots + a_n(x)dx_n$$

$$\stackrel{\text{def.}}{=} \int_a^b \sum_{i=1}^n a_i(\gamma(t))\,\gamma_i'(t)\, dt$$

Si noti che $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \omega = \int_{\mathcal{C}} \omega^{\#}(s) \cdot \vec{\tau}(s)\, ds$

Si avrà quindi che ω è esatta $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \omega = 0$ $\forall$ curva chiusa in Ω. Inoltre se Ω è stellato (o semplicemente connesso) allora ω è esatta $\Leftrightarrow$ ω è chiusa.