

NUMERI COMPLESSI (breve riassunto)

Un numero complesso è un'espressione del tipo $a+ib$ dove a e b sono numeri reali e i è l'"unità immaginaria".

L'insieme dei numeri complessi si indica con $\mathbb{C}$. Formalmente, $\mathbb{C}$ è $\mathbb{R}^2$ equipaggiato con un'opportuna moltiplicazione.

$$\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$a+ib \simeq (a, b)$$

$$i \simeq (0, 1)$$

La moltiplicazione è definita con:

$$\begin{aligned} & (x, y) \times (a, b) \\ & \quad := (xa - yb, xb + ya) \end{aligned}$$

$$\text{cioè } (x+iy) \cdot (a+ib) = (xa - yb) + i(xb + ya)$$

Si noti che $i^2 = -1$, cioè

$$(0, 1) \times (0, 1) = (-1, 0)$$

Coniugato : $\overline{x+iy} := x - iy$

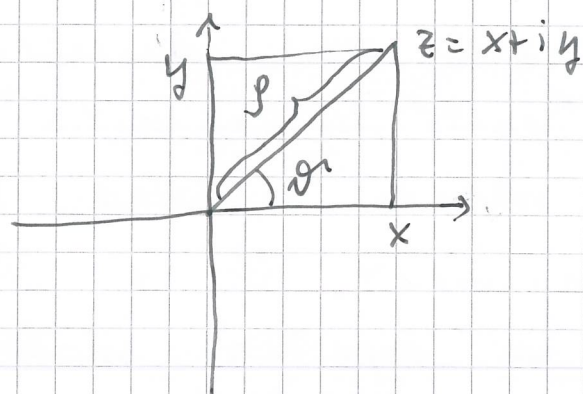
modulo : $|z| = |x+iy| := (x^2 + y^2)^{1/2} = (z\bar{z})^{1/2}$

Proprietà :

$$\begin{aligned} \overline{z+w} &= \bar{z} + \bar{w} \\ \overline{z\bar{w}} &= \bar{z} \bar{\bar{w}} \\ \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} &= \frac{1}{\bar{z}} \end{aligned}$$

COORDINATE POLARI

Poiché identifichiamo $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$, possiamo rappresentare i numeri complessi in coordinate polari:



$$z = (x + iy) \sim (x, y) \longleftrightarrow \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

L'espressione per la trasformazione inversa dipende dal quadrante.

Per esempio nel primo quadrante

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

Richiamiamo la scrittura conveniente

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Vedremo presto che non si tratta solo di una scrittura conveniente, ma dell'identità tra due quantità ben definite. Per il momento però prendiamo $\cos \theta + i \sin \theta$ come la definizione di $e^{i\theta}$.

Dalle formule di addizione si ha che

$$e^{i\theta} e^{i\varphi} = e^{i(\theta + \varphi)}$$

RADICI

Sia $w \in \mathbb{C}$. Vogliamo risolvere l'equazione

$$z^n = w, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (w \neq 0)$$

Scriviamo z e w in coordinate polari

$$z = r e^{i\vartheta} \quad w = \rho e^{i\varphi}$$

Allora l'equazione diventa

$$r^n e^{in\vartheta} = \rho e^{i\varphi}$$

Da cui si ottiene

$$r = \sqrt[n]{\rho} \quad \text{e} \quad \vartheta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad k=0, 1, 2, \dots, n-1$$

quindi le soluzioni di $z^n = w = \rho e^{i\varphi}$

$$\text{sono} \quad z_k := \sqrt[n]{\rho} e^{i(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n})}, \quad k=0, 1, 2, \dots, n-1.$$

PIANO COMPLESSO ESTESO

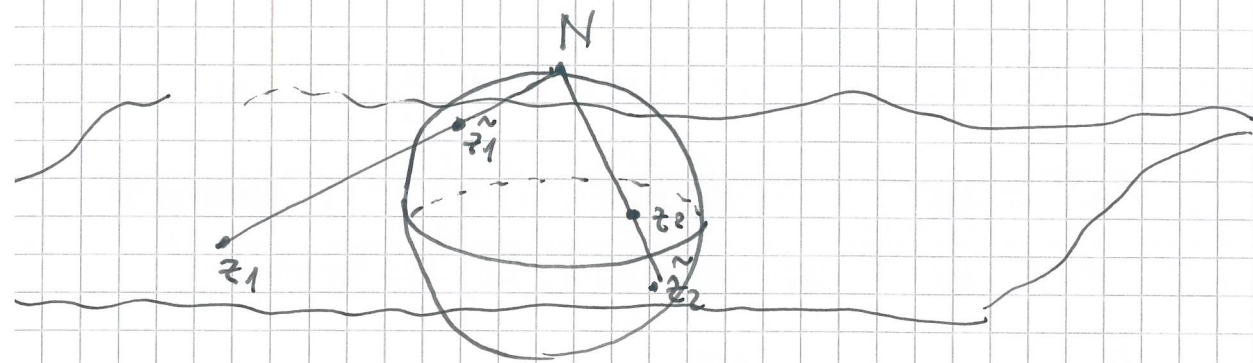
A volte è utile introdurre il piano complesso esteso $\mathbb{C}' = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

La topologia di $\mathbb{C}'$ si definisce ponendo come base di intorni in ∞ le famiglie

$$(U_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}, \quad U_\alpha := \{ |z| > \alpha \} \cup \{\infty\}$$

Con questa topologia $\mathbb{C}'$ è compatto

ed è topologicamente equivalente a una sfera (via proiezione stereografica)



Terminologia :

$$z = x + iy = \rho e^{i\vartheta}$$

$\rho = |z|$ modulo di z

$\vartheta = \arg z$ argomento di z

z ha infiniti argomenti che differiscono fra loro di multipli interi di 2π .

C'è un unico argomento in $[0, 2\pi[$, detto argomento principale, $\text{Arg } z$

$$\arg z = \text{Arg } z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Osservazione

Per risolvere in w $e^w = z$

si scrive $w = a + ib$ $z = |z| e^{i \arg z}$

$$\Rightarrow e^{a+ib} = e^a e^{ib} = |z| e^{i \arg z}$$

$$\Rightarrow a = \log |z|, \quad b = \arg z$$

$$\Rightarrow \log z = \log |z| + i \arg z \quad (\text{infiniti logaritmi}).$$

DIFFERENZIABILITÀ COMPLESSA

Def.

$U \subseteq \mathbb{C}$ si dice aperto $\Leftrightarrow$ è aperto rispetto alla topologia di $\mathbb{R}^2$ (euclidea)

Def.

Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto. Una funzione $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ si dice "differenziabile in senso complesso" in $z_0 \in U \Leftrightarrow$

$$\exists \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0) \in \mathbb{C}$$

se f è differenziabile in senso complesso in ogni $z_0 \in U$, allora si dice che f è olomorfa in U e si scrive $f \in H(U)$.
 $f'(z)$ si dice derivata di f , e f è una primitiva di f' .

Valgono le seguenti regole:

- 1) $(f+g)' = f' + g'$
- 2) $(fg)' = f'g + fg'$
- 3) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ quando $g \neq 0$
- 4) $(g \circ f)'(z) = g'(f(z)) f'(z)$

ESERCIZI

- 1) Dimostrare le proprietà 1) - 4)
- 2) Dimostrare che $f(z) \equiv a \in \mathbb{C}$ e $f(z) = z$ sono olomorfe. $\rightarrow$ Tutte le funzioni razionali sono olomorfe.

EQUAZIONI DI CAUCHY-RIEMANN

Abbiamo sottolineato che dal punto di vista topologico $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$. Se $f: U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ possiamo considerare la differenziabilità reale di f e vedere la relazione con la differenziabilità complessa. Si ha che

$$\vec{f}: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

è differenziabile secondo Fréchet in $\vec{z}_0 \in U$

$\Leftrightarrow \exists$ una mappa $\mathbb{R}$ -lineare $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e una funzione $\vec{\varphi}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, con $\lim_{\|\vec{v}\| \rightarrow 0} \vec{\varphi}(\vec{v}) = 0$, t.c.

$$\vec{f}(\vec{z}_0 + \vec{v}) = \vec{f}(\vec{z}_0) + A\vec{v} + \|\vec{v}\| \vec{\varphi}(\vec{v}).$$

In questo caso, si scrive

$$d\vec{f}(\vec{z}_0) := A.$$

Inoltre $d\vec{f}(\vec{z}_0)$ è rappresentato dalla matrice Jacobiana

$$J\vec{f}(\vec{z}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(\vec{z}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(\vec{z}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\vec{z}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(\vec{z}_0) \end{pmatrix}$$

dove $f = f_1 + i f_2$ o equivalentemente

$$\vec{f} = (f_1, f_2)$$

LEMMA

Sia $V \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $z_0 \in V$, $f: V \rightarrow \mathbb{C}$.

Allora f è differenziabile in senso complesso in $z_0 \iff \vec{f}$ è differenziabile in senso reale in $\vec{z}_0$, ed $\exists w \in \mathbb{C}$ t.c. $\forall \vec{v} \in \mathbb{C}$,

$$d\vec{f}(\vec{z}_0)[\vec{v}] = \underbrace{(w_1 v_1 - w_2 v_2, w_1 v_2 + w_2 v_1)}_{\simeq w \cdot v}$$

dove $v = v_1 + i v_2 \leftrightarrow \vec{v} \simeq (v_1, v_2)$

e $w = w_1 + i w_2$.

Dim.

$\Rightarrow$
Poiché $\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0)$, si ha

$$f(z_0+h) = f(z_0) + f'(z_0)h + |h| \left(\frac{h}{|h|} \left[\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} - f'(z_0) \right] \right)$$

Poniamo

$$\vec{\varphi}(\vec{h}) := \frac{1}{\|h\|} \overrightarrow{h \left(\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} - f'(z_0) \right)}$$

Si ha $\vec{\varphi}(\vec{h}) \xrightarrow{\vec{h} \rightarrow 0} 0$

Inoltre poniamo $A \vec{h} := \overrightarrow{f'(z_0)h}$

Si vede facilmente che $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ è $\mathbb{R}$ lineare. Infine,

$$\vec{f}(\vec{z}_0 + \vec{h}) = \vec{f}(\vec{z}_0) + A \vec{h} + \|\vec{h}\| \vec{\varphi}(\vec{h}).$$

*) Se $\vec{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ è differenziabile secondo Fréchet, ed $\exists w \in \mathbb{C}$ t.c.

$$d\vec{f}(\vec{z}_0)[\vec{v}] = \overrightarrow{wv}, \quad \text{si ha}$$

$$\vec{f}(\vec{z}_0 + \vec{h}) = \vec{f}(\vec{z}_0) + \overrightarrow{wh} + \|\vec{h}\| \vec{\varphi}(\vec{h})$$

Quindi

$$\lim_{\|\vec{h}\| \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(\vec{z}_0 + \vec{h}) - \vec{f}(\vec{z}_0)}{\|\vec{h}\|} = \lim_{\|\vec{h}\| \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{wh} + \|\vec{h}\| \vec{\varphi}(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = \overrightarrow{w}$$

e quindi $\exists f'(z_0) = w$. $\square$

Osserviamo ora che, se $w = w_1 + iw_2$ e
se $z = x + iy$, si ha

$$\begin{aligned} \overrightarrow{wz} &= (w_1x - w_2y, w_1y + w_2x) = \\ &= \begin{pmatrix} w_1 & -w_2 \\ w_2 & w_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Quindi deduciamo che $f = f_1 + if_2: U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
è differenziabile in senso complesso $\Leftrightarrow$
 $\vec{f} = (f_1, f_2)$ è differenziabile in senso
reale, e

$$J\vec{f}(\vec{z}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(\vec{z}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(\vec{z}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\vec{z}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(\vec{z}_0) \end{pmatrix}$$

ha la forma

$$\begin{pmatrix} w_1 & -w_2 \\ w_2 & w_1 \end{pmatrix}$$

cioè le seguenti equazioni sono soddisfatte:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} = -\frac{\partial f_1}{\partial y} \end{cases}$$

equazioni di
Cauchy - Riemann

ESERCIZIO

Dimostrare che la funzione $z \rightarrow \bar{z}$
non è olomorfa.

LE FUNZIONI OLOMORFE SONO CONFORMI

(cioè preservano gli angoli).

Infeatti:

$$J_{\vec{f}}(\vec{z}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(\vec{z}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(\vec{z}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\vec{z}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(\vec{z}_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

ponendo $\rho = (a^2 + b^2)^{1/2}$, si ha

$$J_{\vec{f}}(\vec{z}_0) = \rho \begin{pmatrix} \frac{a}{\rho} & -\frac{b}{\rho} \\ \frac{b}{\rho} & \frac{a}{\rho} \end{pmatrix}$$

poiché $\left(\frac{a}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{b}{\rho}\right)^2 = 1$, $\exists! \varphi \in [0, 2\pi[$

$$\text{t.c. } \frac{a}{\rho} = \cos \varphi, \quad \frac{b}{\rho} = \sin \varphi$$

Segue che

$$J\vec{f}(\vec{z}_0) = \rho \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

cioè $d\vec{f}(\vec{z}_0)$ è la composizione di una rotazione e di una dilatazione, e quindi $\vec{f}$ preserva gli angoli.