SERIE DI POTENZE

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri complessi
Consideriamo la serie di potenze
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad (*)$$

Teorema

$\exists\ R$, $0 \leq R \leq +\infty$ (raggio di convergenza) t.c.

(1) La serie $(*)$ converge assolutamente e uniformemente in $\{|z|\leq \rho\}$ $\forall\ \rho < R$

(2) Se $|z| > R$ la successione $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ non è infinitesima e quindi la serie non converge

(3) Nell' insieme $\{|z| < R\}$ la somma della serie $(*)$ definisce una funzione olomorfa. La derivata si calcola derivando la serie termine a termine, ed è una serie di potenze con lo stesso raggio di convergenza.

Il raggio di convergenza è dato da
$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$$

Dim.

Sia $\quad 1/R := \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$

(1) Sia $\rho < \rho' < R$. Si ha che $\exists\ \bar{n}$ t.c.
$$\frac{1}{\rho'} \geq |a_n|^{1/n} \qquad \forall\ n \geq \bar{n}$$

Quindi $\quad |a_n| \rho'^n \leq 1 \qquad \forall\ n \geq \bar{n}$

Ora per $|z| \leq \rho$ abbiamo

$$|a_n||z|^n \leq |a_n|\rho^n = \underbrace{|a_n|\rho'^n}_{\leq 1}\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^n \leq \left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^n$$

Poiché $\rho/\rho' < 1$, abbiamo convergenza uniforme e assoluta.

(2) Se $|z| > R$, prendiamo $|z| > \rho > R$

Allora per infiniti valori di n si ha

$$\frac{1}{\rho} \leq |a_n|^{1/n}$$

da cui $\quad 1 \leq |a_n|\rho^n \leq |a_n||z|^n$

e quindi la serie non converge.

(3) Derivando formalmente (*), si ottiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

Calcoliamo

$$|n a_n|^{\frac{1}{n-1}} = \left(n^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{n}{n-1}} \left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{n}{n-1}}$$

$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} |a_n a_n|^{\frac{1}{n-1}} = 1/R$$

Ora, per $|z| \leq \rho < R$, consideriamo

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = \lim_{n\to\infty} s_n(z) \quad \text{(unif.)}$$

$$g(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} k a_k z^{k-1} = \lim_{n\to\infty} s_n'(z) \quad \text{(unif.)}$$

E quindi (risultato supposto noto)

f è differenziabile e $f'(z) = g(z)$ ▨

→ abbiamo ottenuto un'ampia classe di funzioni olomorfe.

Osservazione

Ogni serie di potenze definisce una funzione di classe C^∞. Inoltre ammette una primitiva

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n z^{n+1} + C$$

(stesso raggio di convergenza).

Osservazione

Tutto ciò che si è detto finora vale anche per serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n , \quad z_0 \in \mathbb{C}.$$

ESEMPI IMPORTANTI

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{(coincide con } e^x \text{ per } x \in \mathbb{R}\text{)}$$

$$\sin z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{(coincide con } \sin x \text{ per } x \in \mathbb{R}\text{)}$$

$$\cos z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{(coincide con } \cos x \text{ per } x \in \mathbb{R}\text{)}$$

In tutti e tre i casi, $R = +\infty$. Si può verificare utilizzando il criterio del rapporto.

$$\left(\frac{\rho^n}{n!} \Big/ \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{\rho}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \right)$$

Si noti che:

- $\sin z = -\sin(-z) \qquad z \in \mathbb{C}$
- $\cos z = \cos(-z) \qquad z \in \mathbb{C}$
- $e^{iz} = \cos z + i \sin z \qquad z \in \mathbb{C}$
- $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2 \qquad z \in \mathbb{C}$
- $\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/2i \qquad z \in \mathbb{C}$
- $\frac{d}{dz} \sin z = \cos z \qquad z \in \mathbb{C}$
- $\frac{d}{dz} \cos z = -\sin z \qquad z \in \mathbb{C}$
- $\frac{d}{dz} e^z = e^z \qquad z \in \mathbb{C}$

Inoltre vale la proprietà fondamentale

- $e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$

  Si dimostra utilizzando la formula del prodotto alla Cauchy, vedi sotto).

Dalla proprietà fondamentale segue:

- .) $\cos(z+2\pi) = \cos z \qquad z \in \mathbb{C}$
- .) $\sin(z+2\pi) = \sin z \qquad z \in \mathbb{C}$
- .) $(\cos z)^2 + (\sin z)^2 = 1 \qquad z \in \mathbb{C}$

PRODOTTO ALLA CAUCHY (senza dim.)

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ assolutamente convergenti.

Sia

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} .$$

Allora $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ è assolutam. converg.

e si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) .$$

ESERCIZIO

Dimostrare che $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$.