INTEGRAZIONE SU CAMMINI

Def.

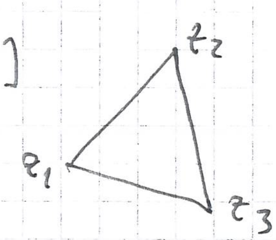
Una curva in $\mathbb{C}$ è una funzione continua
$\gamma : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$.
L'immagine di γ si indica con $\gamma^* := \{\gamma(t) \mid t \in [a,b]\}$
ed è chiamata "sostegno" di γ. Se $\gamma(a) = \gamma(b)$
γ si dice "curva chiusa".

Def.

Un cammino è una curva C^1 a tratti. Cioè
tale che esistono punti $a = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = b$
tali che $\gamma \in C^1([s_{i-1}, s_i]) \ \forall\, i = 1, \ldots, m$.

ESEMPI

1) la circonferenza $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$
2) Il segmento $[z_1, z_2]$ $\gamma(t) := z_1 + t(z_2 - z_1)$
   $t \in [0, 1]$
2) Il triangolo $[z_1, z_2, z_3]$



ottenuto giustapponendo tre segmenti.

Definizione

Sia $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un cammino e
sia $f : \gamma^* \longrightarrow \mathbb{C}$ continua. Definiamo

$$\int_\gamma f(z)\, dz := \int_a^b f(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt.$$

Osservazione

Se $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ è un cammino e se $\varphi : [a_1, b_1] \to [a, b]$ è C^1 e iniettiva, con $\varphi(a_1) = a$, $\varphi(b_1) = b$, ponendo $\gamma_1(t) := \gamma(\varphi(t))$, $t \in [a_1, b_1]$, si ha che γ_1 è un cammino e

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_1(t))\dot{\gamma}_1(t)\,dt = \int_{a_1} f(\gamma(\varphi(t)))\dot{\gamma}(\varphi(t))\dot{\varphi}(t)\,dt$$

$$= \int_a^b f(\gamma(s))\,\dot{\gamma}(s)\,ds = \int_\gamma f(z)\,dz$$

Ciò significa che $\int_\gamma f(z)\,dz$ è indipendente dalla parametrizzazione. Si noti che se $\varphi(a_1) = b$, $\varphi(b_1) = a$, allora

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz .$$

Si noti inoltre che

$$\left| \int_\gamma f(z)\,dz \right| \leq \|f\|_\infty \underbrace{\int_\alpha^\beta |\dot{\gamma}(t)|\,dt}_{\text{lunghezza di } \gamma.}$$

TEOREMA

Sia $F : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa. Supponiamo che F' sia continua su Ω.

Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un cammino chiuso in Ω

Allora
$$\int_\gamma F'(z)\,dz = 0$$

Dimostr.

$$\int_\gamma F'(z)\,dz = \int_a^b F'(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_a^b \frac{d}{dt} F(\gamma(t))\,dt$$

$$= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0 . \quad \boxtimes$$

Corollario

Per $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$ e γ cammino chiuso si ha
$$\int_\gamma z^n\,dz = 0$$

(se $n<0$, bisogna supporre che $0 \notin \gamma^*$).

Dim.

$\dfrac{z^{n+1}}{n+1}$ è primitiva di z^n. $\boxtimes$

OSSERVAZIONE

Vedremo in seguito cosa succede per $n=-1$.

TEOREMA DI CAUCHY - GOURSAT

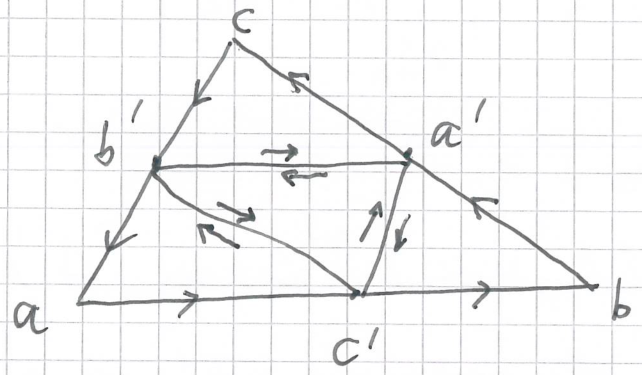
Sia Δ un triangolo chiuso contenuto in un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Sia $p \in \Omega$.

Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continua e t.c. $f \in H(\Omega \setminus \{p\})$.

Allora
$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$$

Dimostrazione

Supponiamo prima che $p \notin \Delta$. Chiamiamo a, b, c i vertici di Δ, e a', b', c' i punti medi di $[b,c]$, $[a,c]$ e $[a,b]$ rispettivamente.



Il triangolo Δ è quindi scomposto in quattro triangoli $\tilde{\Delta}_j$, $j = 1, 2, 3, 4$.

Scriviamo $J := \int_{\partial\Delta} f(z)\,dz$. Si ha

$$J = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial\tilde{\Delta}_j} f(z)\,dz$$

Tra i triangoli $\tilde{\Delta}_j$, $j = 1, \dots, 4$, ce n'è uno, che chiamiamo Δ_1, t.c.

$$\left| \int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz \right| = \max_{j=1,\dots,4} \left| \int_{\partial\tilde{\Delta}_j} f(z)\,dz \right|$$

Segue che $|J| \leq 4 \left| \int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz \right|$.

Ripetiamo lo stesso ragionamento su Δ_1 e così via.

In questo modo costruiamo una successione di triangoli

$$\Delta \supseteq \Delta_1 \supseteq \Delta_2 \supseteq \Delta_3 \supseteq \dots \supseteq \Delta_n \supseteq \dots$$

tali che:

•) $$|J| \leq 4^n \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)\, dz \right|$$

•) $$l(\partial\Delta_n) = 2^{-n} l(\partial\Delta)$$

•) $$\mathrm{diam}(\Delta_n) = 2^{-n}\mathrm{diam}(\Delta)$$

Per il teorema di Weierstrass, $\exists!\ z_0 \in \Delta$ tale che

$$\{z_0\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n$$

Per la nostra ipotesi, f è differenziabile in z_0. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Allora $\exists\ r > 0$ t.c., se $|z - z_0| < r$,

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leq \varepsilon |z - z_0|.$$

Inoltre, $\exists\ \bar{n}$ t.c. $\forall\ n \geq \bar{n}$, $\forall z \in \Delta_n$,

$$|z - z_0| < r$$

Segue che, per $n \geq \bar{n}$,

$$\left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)\, dz \right| = \left| \int_{\partial\Delta_n} [f(z) - \underbrace{f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}_{\text{ha primitiva!}}]\, dz \right|$$

$$\leq l(\partial\Delta_n) \sup_{z\in\partial\Delta_n} |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)|$$

$$\leq l(\partial\Delta_n)\, \varepsilon\, \mathrm{diam}(\Delta_n)$$

Così otteniamo

$$\left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz \right| \leq 2^{-n} l(\partial\Delta)\, \varepsilon\, 2^{-n} \operatorname{diam}(\Delta)$$

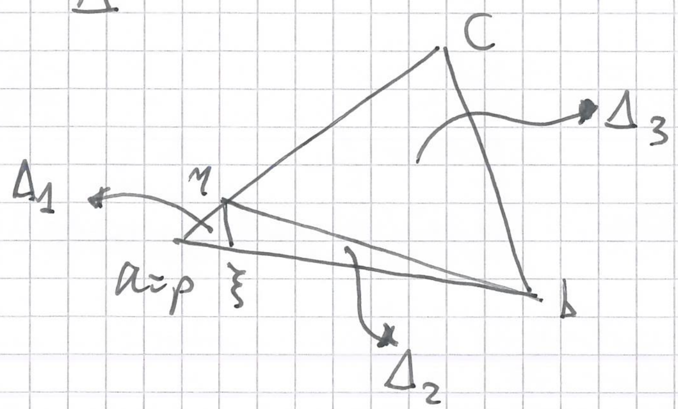
e alla fine

$$|J| \leq \varepsilon\, l(\partial\Delta) \operatorname{diam}(\Delta).$$

Poiché ε è arbitrario, segue che

$$|J| = 0, \quad \text{cioè} \quad \int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0.$$

Supponiamo ora che p sia un vertice di Δ



Scomponiamo Δ come in figura.

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz + \underbrace{\int_{\partial\Delta_2} f(z)\,dz}_{=0} + \underbrace{\int_{\partial\Delta_3} f(z)\,dz}_{=0}$$

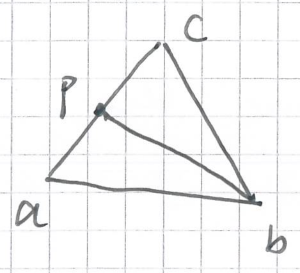
per il passo precedente.

$$\Rightarrow \left| \int_{\partial\Delta} f(z)\,dz \right| = \left| \int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz \right| \leq \max_{z\in\Delta} |f(z)|\, l(\partial\Delta_1)$$

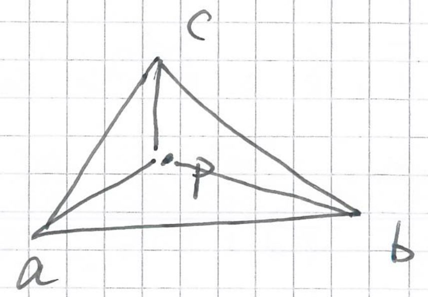
Scegliendo ξ e η opportunamente, $l(\partial\Delta_1)$ può essere reso arbitrariamente piccolo.

Da ciò segue che $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$.

Infine, se $p \in \Delta$ ma non è un vertice, si scompone Δ in modo opportuno



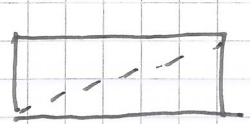
oppure

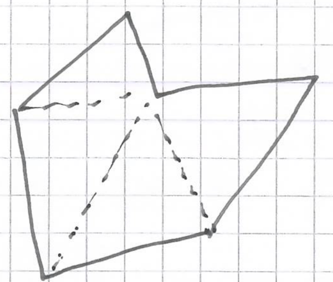


e abbiamo concluso. $\boxtimes$

Corollario

Sia $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa. Sia $P \subseteq \Omega$ t.c. ∂P sia una poligonale.





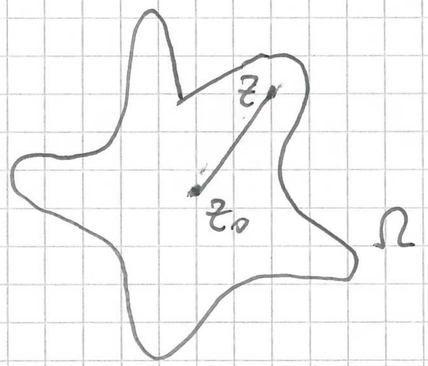
Allora $\int_{\partial P} f(z)\,dz = 0$

(Infatti P può essere scomposto in un numero finito di triangoli.

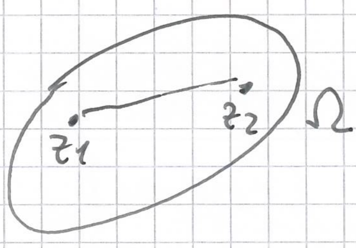
Definizione

Un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ si dice "stellato" rispetto a un punto $z_0 \in \Omega$, se e solo se

$\forall z \in \Omega$, il segmento $[z_0, z]$ è completamente contenuto in Ω.



Un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ si dice "convesso" se e solo se $\forall z_1, z_2 \in \Omega$ il segmento $[z_1, z_2]$ è completamente contenuto in Ω



(N.B. convesso $\Rightarrow$ stellato).

TEOREMA DI CAUCHY IN UN DOMINIO STELLATO

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ stellato rispetto a z_0. Sia $p \in \Omega$ e sia f continua su Ω e olomorfa su $\Omega \setminus \{p\}$. Allora f ammette una primitiva $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ (i.e. $F' = f$)

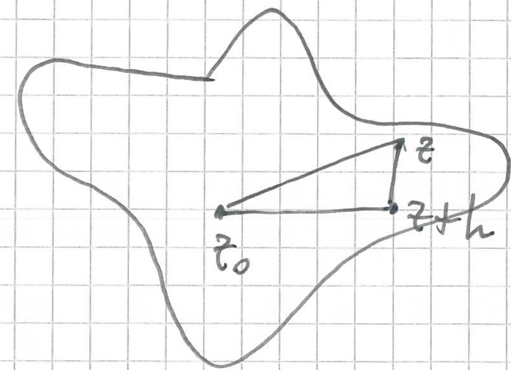
Di conseguenza,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

$\forall$ cammino chiuso γ in Ω.

<u>Dim.</u>

Definiamo $$F(z) := \int_{[z_0, z]} f(\zeta)\, d\zeta \quad , \quad z \in \Omega$$



Per Cauchy-Goursat,

$$\int_{[z_0, z]} f(\zeta) d\zeta + \int_{[z, z+h]} f(\zeta) d\zeta + \int_{[z+h, z_0]} f(\zeta) d\zeta = 0$$

$\Longrightarrow$

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z, z+h]} f(\zeta)\, d\zeta$$

Allora si ha

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} \big(f(\zeta) - f(z) \big)\, d\zeta$$

$\Longrightarrow$

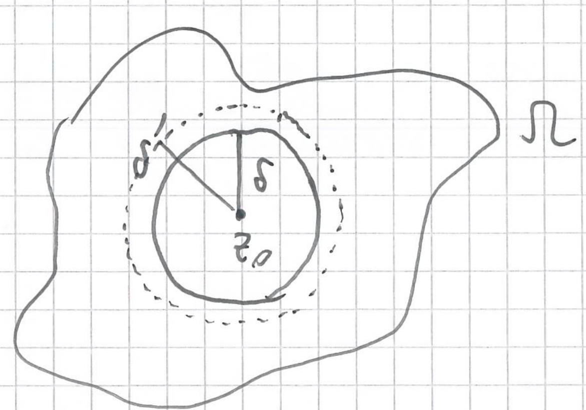
$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| \leq \frac{1}{|h|} |h| \sup_{\zeta \in [z, z+h]} |f(\zeta) - f(z)|$$

$$\xrightarrow[|h| \to 0]{} 0$$

$\blacksquare$

Conseguente.

1) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto e f olomorfa in Ω.
Supponiamo che $\bar{D} := \{ |z-z_0| \leq \delta \} \subseteq \Omega$.
Allora
$$\int_{|z-z_0|=\delta} f(\zeta)\, d\zeta = 0$$

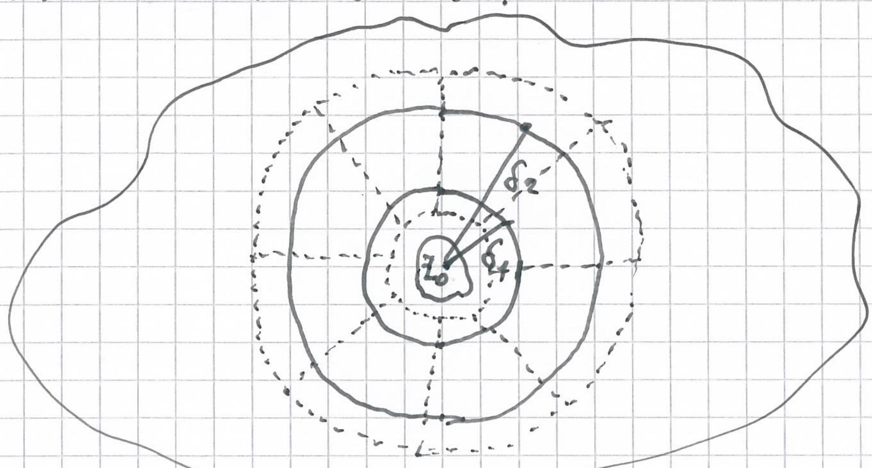


2) La corona circolare.

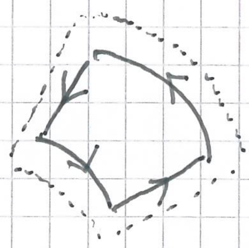
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $f \in H(\Omega)$ e supponiamo che $\bar{C} := \{ \delta_1 \leq |z-z_0| \leq \delta_2 \} \subseteq \Omega$,
dove
$$0 < \delta_1 < \delta_2$$

Allora
$$\int_{|z-z_0|=\delta_1} f(\zeta)\, d\zeta = \int_{|z-z_0|=\delta_2} f(\zeta)\, d\zeta$$

(la parametrizzazione è sempre fatta in senso antiorario).



Si decompone la corona in sottoinsiemi della forma



Su ciascuno di questi cammini l'integrale è zero perché è contenuto in uno stellato, e la conclusione segue.