ANALISI COMPLESSA – Esercizi – Foglio 2

Esercizio 1. Si definisca la lunghezza di una curva differenziabile $\gamma : [t_0, t_1] \to \mathbb{C}$ nel seguente modo:

$$\ell(\gamma) := \int_{t_0}^{t_1} |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

Sia $f : U \to \mathbb{C}$ una funzione continua e sia $\gamma : [t_0, t_1] \to U$ una curva differenziabile. Sia $C := \max_{z \in \gamma^*} |f(z)|$. Si dimostri che

$$|\int_\gamma f(z) dz| \leq \ell(\gamma) C.$$

Esercizio 2 Sia $\gamma(t) := te^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$. Si calcoli: (i) $\int_\gamma \bar{z}\, dz$, (ii) $\int_\gamma z\, dz$, (iii) $\int_\gamma |z|\, dz$.

Esercizio 3 Sia $\gamma(t) := 3t^2 + 2t^3 i$, $0 \leq t \leq 1$. Si calcolo: (i) $\ell(\gamma)$, (ii) $\int_\gamma x\, dz$, (iii) $\int_\gamma z\, dz$.

Esercizio 4. Sia f olomorfa su $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$, e sia $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$. Si dimostri che, per $\epsilon > 0$ sufficientemente piccolo,

$$\int_{|z|=\epsilon} \frac{dz}{f(z)} = \frac{2\pi \mathrm{i}}{f'(0)}.$$

Esercizio 5. Sia $f(z) := (z - 1 - i)^{-2} \sin z$ e $c_n := (1/n!) f^{(n)}(0)$. Determinare il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$.

Esercizio 6. Calcolare

$$\int_{|z-1|=2} z^{-4} \sin z \; dz.$$