# IL LOGARITMO

Cominciamo col definire il logaritmo come numero. Per definizione, $z = \log w$ è qualunque soluzione dell'equazione

$$e^z = w$$

Innanzitutto, poiché $e^z \neq 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$, il numero 0 non possiede logaritmi.

Se $w \neq 0$, l'equazione

$$\left[\begin{array}{l} e^{x+iy} = w = |w| \dfrac{w}{|w|} \\ = e^x e^{iy} \end{array}\right.$$

è equivalente a

$$\begin{cases} e^x = |w| \\ e^{iy} = \dfrac{w}{|w|} \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} x = \log_{\mathbb{R}} |w| \\ e^{iy} = \dfrac{w}{|w|} \end{cases}$$

dove con $\log_{\mathbb{R}}$ indichiamo il logaritmo nel campo reale.

Fissiamo arbitrariamente $\varphi \in \mathbb{R}$. Allora

- A2 -

l'equazione $e^{iy} = \frac{w}{|w|}$ ha una ed una sola soluzione $\vartheta \in [\varphi, \varphi + 2\pi[$.

Inoltre, l'equazione è soddisfatta da tutti e soli i numeri reali della forma $\vartheta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Pertanto, ogni $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ possiede infiniti logaritmi, precisamente

$$\log_{\mathbb{R}} |w| + \vartheta i + 2k\pi i \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

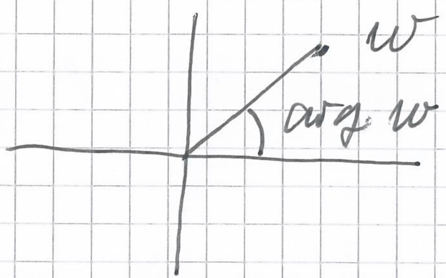
$$\vartheta \in [\varphi, \varphi + 2\pi[ .$$

Di solito si sceglie $\varphi = 0$.

La parte immaginaria del logaritmo è chiamata "argomento di $w$", e si indica con

$$\arg w$$

Geometricamente esprime l'angolo tra l'asse reale positivo e la semiretta $\overrightarrow{Ow}$




$\arg w$ ha infiniti valori, che differiscono tra loro di $2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

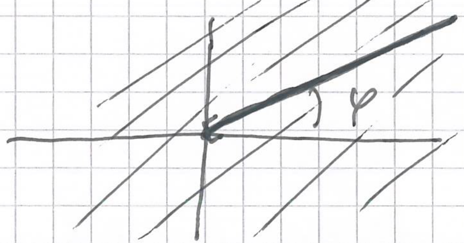
Scriviamo $\log w = \log_{\mathbb{R}}|w| + i \arg w$.

Se fissiamo $\varphi\in\mathbb{R}$ e consideriamo l'insieme

$$\Pi^{(\varphi)} := \{w\in\mathbb{C}\setminus\{0\} \mid \varphi\notin \arg w\},$$

allora $\exists!$ soluzione $\vartheta\in\,]\varphi,\varphi+2\pi[$ dell'equazione

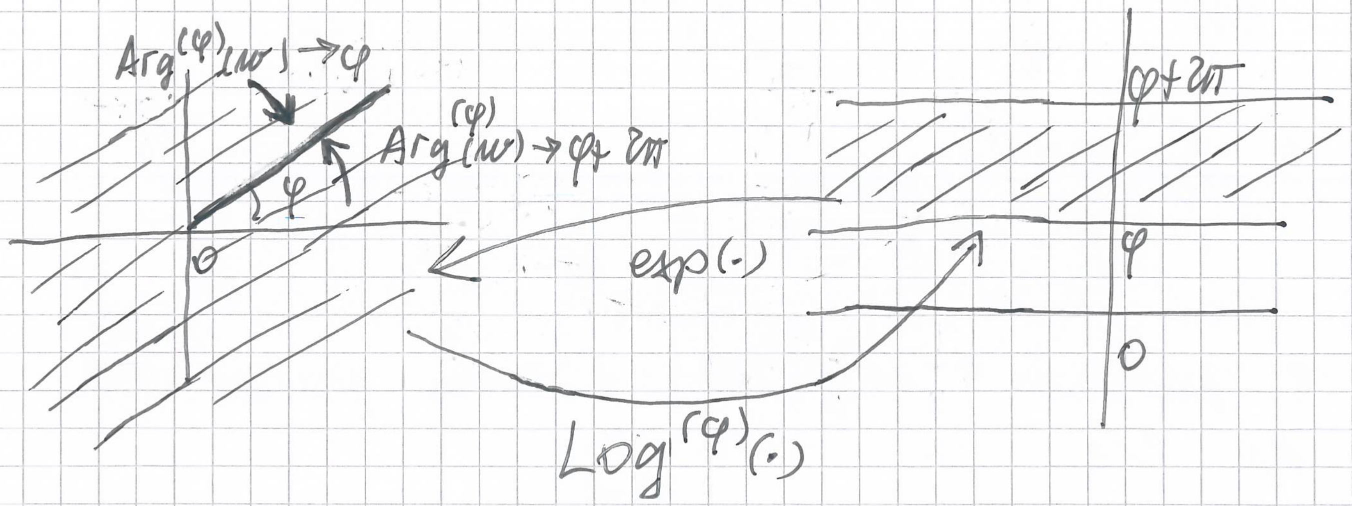
$$e^{i\vartheta} = \frac{w}{|w|}$$




Così $\forall\,\varphi\in\mathbb{R}$ possiamo definire funzioni

$$\mathrm{Log}^{(\varphi)} : \Pi^{(\varphi)} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\mathrm{Arg}^{(\varphi)} : \Pi^{(\varphi)} \longrightarrow \mathbb{R}$$



$\mathrm{Log}^{(\varphi)}$ si dice "ramo di logaritmo".

Se $\varphi = 0$, $\mathrm{Log}^{(0)} =: \mathrm{Log}$ si dice "ramo principale" di logaritmo.

Valgono le seguenti proprietà:

$$\left.\begin{aligned} \log(z_1 z_2) &= \log z_1 + \log z_2 \\ \arg(z_1 z_2) &= \arg z_1 + \arg z_2 \end{aligned}\right\} \text{ eguaglianze di insiemi.}$$

OSSERVAZIONE

Ogni ramo di logaritmo è una funzione olomorfa (per il teorema della funzione inversa e per Cauchy-Riemann). Inoltre si ha

$$e^{\mathrm{Log}^{(\varphi)} z} = z,$$

derivando si ha

$$\left(\frac{d}{dz} \mathrm{Log}^{(\varphi)} z\right) \underbrace{e^{\mathrm{Log}^{(\varphi)} z}}_{= z} = 1$$

e quindi

$$\frac{d}{dz} \mathrm{Log}^{(\varphi)}(z) = \frac{1}{z}$$

e quindi $\mathrm{Log}^{(\varphi)}(z)$ è una primitiva di $1/z$.

# POTENZE CON ESPONENTE COMPLESSO

Per $z \neq 0$, $w \in \mathbb{C}$, definiamo

$$z^w := e^{w \log z} = e^{w(\log_{\mathbb{R}}|z| + i \arg z)}$$

Abbiamo

$$z^w = e^{w \log_{\mathbb{R}}|z|} e^{w i \arg z}$$
$$= e^{w \log_{\mathbb{R}}|z|} e^{iw(\mathrm{Arg}^{(\varphi)} z + 2k\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z}$$
$$= e^{w(\log_{\mathbb{R}}|z| + i \mathrm{Arg}^{(\varphi)} z)} e^{iw2k\pi} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

dove $\varphi \in \mathbb{R}$ è arbitrario.

Vediamo alcuni casi particolari:

1) $w \in \mathbb{Z}$. Allora la funzione $z \mapsto z^w$ diventa

$$z^w = e^{w(\log_{\mathbb{R}}|z| + i \mathrm{Arg}^{(\varphi)} z)} = \left(e^{\log_{\mathbb{R}}|z| + i \mathrm{Arg}^{(\varphi)} z}\right)^w$$

$$= \begin{cases} \underbrace{z \cdot z \cdots z}_{w \text{ volte}} & \text{se } w > 0 \\ \underbrace{z^{-1} \cdots z^{-1}}_{w \text{ volte}} & \text{se } w < 0 \\ 1 & \text{se } w = 0 \end{cases}$$

Quindi per $w \in \mathbb{Z}$, $z^w$ coincide con la potenza standard.

- A6 -

2) $w = \frac{1}{n}$ , $n \in \mathbb{N}$.

Allora

$$z^{w} = z^{1/n} = e^{\frac{1}{n}\left(\log_{\mathbb{R}}|z| + i\,\mathrm{Arg}^{(\varphi)} z\right)}\, e^{i\frac{2k\pi}{n}} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$= |z|^{1/n}\, e^{\frac{1}{n}\left(\mathrm{Arg}^{(\varphi)}(z) + 2k\pi\right)i} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Quindi $z^{1/n}$ ha esattamente $n$ valori distinti che sono esattamente le $n$ radici $n$-esime di $z$.

Pertanto, $\forall\, \varphi \in \mathbb{R}$ fissato, possiamo definire $n$ rami distinti della radice $n$-esima sull'insieme $\Pi^{(\varphi)}$