FOGLIO 3 - Svolgimento

ES. 1

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa e non costante. Dimostrare che $f(\mathbb{C})$ è denso in $\mathbb{C}$.

Dim.

Se non fosse denso, $\exists$ un disco $D(w_0, R)$ t.c. $D(w_0, R) \subseteq \mathbb{C} \setminus f(\mathbb{C})$.

Allora $|f(z) - w_0| \geq R \quad \forall z \in \mathbb{C}$

e quindi $\left| \dfrac{1}{f(z) - w_0} \right| \leq \dfrac{1}{R} \quad \forall z \in \mathbb{R}$

Liouville $\Longrightarrow \dfrac{1}{f(z) - w_0} \equiv$ cost.

$\Longrightarrow f$ è costante.

ES. 2

$n \in \mathbb{N}, \quad r, c > 0 \quad f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ t.c.

$$|f(z)| \leq c\,|z|^n \quad \forall\, |z| \geq r.$$

Dimostrare che f è un polinomio, di grado al massimo n.

Dim.

f si può sviluppare in serie su tutto $\mathbb{C}$.

Allora
$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots$$
$$= P_n(z) + z^{n+1} g(z)$$

dove $P_n(z)$ è un polinomio di grado $\leq n$ e $g \in H(\mathbb{C})$.

Allora

$$\frac{|f(z)|}{|z|^n} \leq C \qquad \forall\ |z| \geq R$$

$$= \frac{|P_n(z) + z^{n+1} g(z)|}{|z|^n} \geq |z|\,|g(z)| - \frac{|P_n(z)|}{|z|^n}$$

$$\Rightarrow \ |g(z)| \leq \frac{C}{|z|} + \frac{|P_n(z)|}{|z|^{n+1}} \qquad \forall\ |z| \geq R$$

$$\Rightarrow \lim_{|z|\to\infty} |g(z)| = 0$$

$$\Rightarrow \ \exists\ \tilde{C} \ \text{ t.c. } \ |g(z)| \leq \tilde{C} \quad \forall\ z \in \mathbb{C}$$

Liouville $\Rightarrow$ $g \equiv$ cost

e poiché $\lim_{|z|\to\infty} |g(z)| = 0$, $g \equiv 0$. $\blacksquare$

$\boxed{\text{ES. 3}}$

$f(z_0) = 0$ sia n l'ordine di z_0 come zero. Dobbiamo dimostrare che $\exists$ localmente $g(z)$ t.c. $f(z) = g(z)^k$ vicino a z_0 $\Leftrightarrow$ k divide n

Dim.

Sappiamo che $\exists$ h t.c. $h(z_0) = 0$ e z_0 è uno zero semplice, tale che

$f(z) = h(z)^n$ vicino a z_0.

Ora se k divide n, si ha

$n = kp$ per qualche $p \in \mathbb{N}$.

allora $f(z) = h(z)^n = h(z)^{k\cdot p} = (h(z)^p)^k$

e basta porre $g(z) := h(z)^p$

Viceversa, se $\exists\, g(z)$ t.c. $f(z) = g(z)^k$,

sia p l'ordine di z_0 come zero di g.

allora $g(z) = (z-z_0)^p \tilde{g}(z)$ con $\tilde{g}(z_0) \neq 0$.

allora $f(z) = (z-z_0)^{kp} \tilde{g}(z)^k$

e l'ordine di z_0 è kp, e quindi

$n = kp$.

P.S. se $n = +\infty$, $f(z) \equiv 0$.

ES. 4

$U_0 \subseteq \mathbb{R}$ intervallo. $f_0 : U_0 \to \mathbb{R}$ analitica.

Dimostrare che $\exists\, U \subseteq \mathbb{C}$ aperto, con $U_0 \subseteq U$, e $f \in \mathcal{H}(U)$, t.c. $f|_{U_0} = f_0$.

<u>Dim.</u>

$\forall\, \bar{x} \in U_0\ \exists\, r_{\bar{x}} > 0$ ed $\exists$

sviluppo in serie di f_0 su $]\bar{x} - r_{\bar{x}}, \bar{x} + r_{\bar{x}}[$

$$f_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-\bar{x})^n \qquad x \in]\bar{x} - r_{\bar{x}}, \bar{x} + r_{\bar{x}}[$$

Considero $D(\bar{x}, r_{\bar{x}}) \subseteq \mathbb{C}$ e su tale disco considero

$$f_{\bar{x}}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\bar{x})^n \qquad z \in D(\bar{x}, r_{\bar{x}}).$$

(il raggio di convergenza deve essere esattamente $r_{\bar{x}}$ per definizione).

Definisco ora

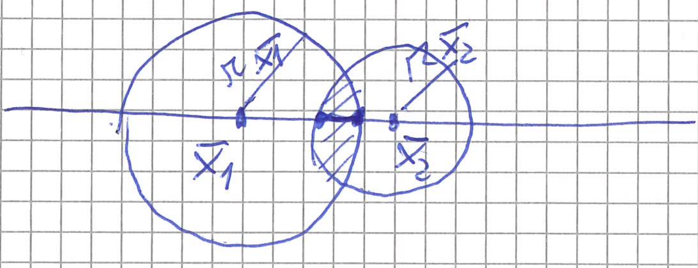
$$U := \bigcup_{\bar{x} \in U_0} D(\bar{x}, r_{\bar{x}})$$

U è aperto. Per $z \in U$ definisco

$$f(z) := f_{\bar{x}}(z) \qquad \text{se } z \in D(\bar{x}, r_{\bar{x}}).$$

La definizione non è ambigua, perché se $D(\bar{x}_1, r_{\bar{x}_1}) \cap D(\bar{x}_2, r_{\bar{x}_2}) \neq \emptyset$ allora

$$\emptyset \neq \left]\bar{x}_1 - r_{\bar{x}_1}, \bar{x}_1 + r_{\bar{x}_1}\right[\cap \left]\bar{x}_2 - r_{\bar{x}_2}, \bar{x}_2 + r_{\bar{x}_2}\right[$$



Quindi $f_{\bar{x}_1} \equiv f_{\bar{x}_2}$ su $\left]\bar{x}_2 - r_{\bar{x}_2}, \bar{x}_1 + r_{\bar{x}_1}\right[$

e per il teorema di unicità

$$f_{\bar{x}_1} \equiv f_{\bar{x}_2} \quad \text{su} \quad D(\bar{x}_1, r_{\bar{x}_1}) \cap D(\bar{x}_2, r_{\bar{x}_2})$$

ES. 5 $f \in H(D(0,1))$

$f: D(0,1) \to D(0,1)$ $\quad f(0) = 0$

f bi-olomorfa

$\Rightarrow$ f è una rotazione.

Dim.

$f: D(0,1) \to D(0,1)$

$f^{-1}: D(0,1) \to D(0,1)$

Schwartz $\Rightarrow$ $|f'(0)| \leq 1$.

Inoltre $|(f^{-1})'(0)| \leq 1$

$$= \left| \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} \right| = \frac{1}{|f'(0)|}$$

$\Rightarrow$ $|f'(0)| = 1$

Schwartz $\Rightarrow$ f è una rotazione. $\boxtimes$

ES. 6 Ω aperto connesso in $\mathbb{C}$

$K \subseteq \Omega$ compatto, $\mathring{K} \neq \emptyset$

$f: \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfa non costante

$|f(z)| \equiv M$ su ∂K. Allora f ha zeri in K.

(6)

Dim.

Per il principio del massimo,

$$|f(z)| \leq \max_{\tilde{z} \in \partial K} |f(\tilde{z})| = M \quad \forall\, z \in \mathring{K}$$

Se $M = 0$, allora $f \equiv 0$ su K ✓

Se invece $M \neq 0$, suppongo che per assurdo f non abbia zeri in K.

Allora $\frac{1}{f(z)}$ è continua su K e olomorfa in $\mathring{K}$.

$$\Rightarrow \frac{1}{|f(z)|} \leq \max_{\tilde{z} \in \partial K} \frac{1}{|f(\tilde{z})|} = \frac{1}{M} \quad \forall z \in \mathring{K}$$

$$\Rightarrow M \leq |f(z)| \leq M \quad \forall\, z \in K$$

$$\Rightarrow |f(z)| = M \quad \forall\, z \in \mathring{K} \neq \emptyset$$

Poiché f non è costante, ciò contraddice il teorema delle mappe aperte. ∎