SINGOLARITÀ DI FUNZIONI OLOMORFE
(Funzioni meromorfe).

Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto, e sia $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa. I punti isolati di $\mathbb{C} \setminus U$ si dicono "singolarità isolate di f".
In altre parole, un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ è una singolarità isolata di f $\Leftrightarrow$ f è olomorfa in $D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$ per qualche $\varepsilon > 0$.
Ci sono tre tipi di singolarità isolate.

Definizione 1
Una singolarità isolata z_0 si dice removibile se e solo se $\exists\ \alpha \in \mathbb{C}$ tale che la funzione

$$\tilde{f}(z) := \begin{cases} f(z), & z \in U \\ \alpha & z = z_0 \end{cases}$$

è olomorfa in $U \cup \{z_0\}$.

Definizione 2
Una singolarità isolata z_0 si dice polo se e solo se z_0 non è removibile, ma $\exists\ m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ t.c.

$$(z - z_0)^m f(z)$$

abbia una singolarità removibile in z_0.
Il più piccolo m per cui ciò si verifica è detto "ordine del polo"

Definizione 3

Una singolarità isolata che non sia né removibile, né un polo, si dice "singolarità essenziale".

ESEMPI

1) Se g è olomorfa, $g(z_0) \neq 0$, allora $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$ ha un polo di ordine m in z_0.

2) $f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ ha una singolarità essenziale in $z_0 = 0$. Infatti, se esistesse $m \in \mathbb{N}$ t.c. $z^m \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ ha una singolarità removibile, allora $\exists\, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa tale che

$$g(z) = z^m \sin\left(\frac{1}{z}\right) \quad \forall\, z \neq 0.$$

Gli zeri di g si accumulano in 0. Allora dovrebbe essere $g(z) \equiv 0$. assurdo.

Definizione

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ una funzione f si dice meromorfa in Ω $\Leftrightarrow$ $\exists\, A \subseteq \Omega$ t.c.

(a) A non ha punti di accumulazione in Ω

(b) $f \in H(\Omega \setminus A)$

(c) f ha un polo in ogni punto di A.

A può anche essere vuoto, cosicché $M(\Omega) \subseteq H(\Omega)$, dove $M(\Omega)$ è lo spazio delle funzioni meromorfe.

Osservazione

Se f è una funzione meromorfa e z_0 è un polo di ordine m, allora $g(z) := f(z)(z-z_0)^m$ può essere estesa a una funzione $\tilde{g}$ che è olomorfa in un intorno di z_0. Segue che in un intorno di z_0, $f(z) = \dfrac{\tilde{g}(z)}{(z-z_0)^m}$

cioè f è localmente il quoziente di due funzioni olomorfe. D'altra parte, si ha:

LEMMA

Siano g, h due funzioni olomorfe in un intorno di z_0. Assumiamo che $h(z)$ abbia in z_0 uno zero di molteplicità m, e $g(z)$ abbia in z_0 uno zero di molteplicità k. Se $g(z_0) \neq 0$, si pone $k=0$. Sia

$$f(z) := \frac{g(z)}{h(z)}$$

Allora

a) Se $m > k$, f ha in z_0 un polo di ordine $m-k$;

b) Se $m \leq k$, allora f ha una singolarità removibile in z_0. Se $m < k$, f ha in z_0 uno zero di molteplicità $k-m$.

<u>Dim.</u>

Usando gli sviluppi di Taylor, possiamo scrivere

$$h(z) = (z-z_0)^m \tilde{h}(z) \qquad \tilde{h}(z_0) \neq 0$$
$$g(z) = (z-z_0)^k \tilde{g}(z) \qquad \tilde{g}(z_0) \neq 0$$

con $\tilde{h}$ e $\tilde{g}$ olomorfe in un intorno di z_0.

Allora $\dfrac{g(z)}{h(z)} = (z-z_0)^{k-m} \dfrac{\tilde{g}(z)}{\tilde{h}(z)}$

e la conclusione segue $\square$

<u>Osservazione</u>

Se f ha un polo di ordine k in z_0, allora $\dfrac{1}{f(z)}$ ha uno zero di molteplicità k in z_0, e viceversa.

<u>Osservazione</u>

È facile dimostrare che, se $f, g \in M(\Omega)$, allora $f+g$, $f \cdot g$, αf, $\frac{1}{f} \in M(\Omega)$

Quindi $M(\Omega)$ è un campo.

SERIE DI LAURENT

Una "<u>serie di Laurent</u>" è un'espressione formale del tipo

$$(*)\quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}}_{\text{parte principale}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n}_{\text{parte secondaria}}.$$

Si dice che $(*)$ è convergente (semplicemente / assolutamente / uniformemente) su un insieme $E \subseteq \mathbb{C}$ se e solo se la sua parte principale e la sua parte secondaria sono convergenti (semplicemente / assolutamente / uniformemente) su E.

In tale caso, la somma $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ è <u>per definizione</u>

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}}_{\substack{\text{somma della}\\ \text{parte principale}}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-z_0)^n}_{\substack{\text{somma}\\ \text{della parte}\\ \text{secondaria}}}.$$

Si noti che la parte principale è una serie di potenze nella variabile $(z-z_0)^{-1}$.

se $\frac{1}{r} \in [0, +\infty]$ è il raggio di convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \zeta^n$ ed $R \in [0, +\infty]$ è il raggio di convergenza di $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$, cioè

$$r = \limsup_{n \to \infty} |c_{-n}|^{1/n}$$

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \to \infty} |c_n|^{1/n},$$

allora la serie di Laurent $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$ converge (assolutamente) nella <u>corona circolare</u> $\{r < |z-z_0| < R\} = C_{r,R}(z_0)$ e ivi definisce una funzione olomorfa.
La serie non converge se

$|z-z_0| < r$ oppure $|z-z_0| > R$.

Chiamiamo $C_{r,R}(z_0) := \{r < |z-z_0| < R\}$ la <u>"corona di convergenza"</u> di (*).

Se $r < \rho_1 < \rho_2 < R$, allora la convergenza è uniforme in $\{\rho_1 \le |z-z_0| \le \rho_2\}$.
Segue che si può derivare $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ termine a termine.

<u>N.B.</u> f ammette primitiva in $C_{r,R}(z_0) \Leftrightarrow c_{-1} = 0$.

FORMULE DI CAUCHY PER I COEFFICIENTI DI LAURENT.

Se $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$ converge in $\{r<|z-z_0|<R\}$ e definisce in tale insieme la funzione f, allora

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-z_0|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\, d\zeta$$

$\forall\, n \in \mathbb{Z}$ e $\forall\, \rho$, $r<\rho<R$.

Dim.

$\forall\, n$, consideriamo

$$\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (\zeta-z_0)^{k-(n+1)}$$

Poiché la serie converge uniformemente in $\{|z-z_0|=\rho\}$, si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-z_0|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{|\zeta-z_0|=\rho} \frac{c_k}{(\zeta-z_0)^{(n+1)-k}}\, d\zeta$$

poiché ogni integrando ammette primitiva, eccetto quando $(n+1)-k=1$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-z_0|=\rho} \frac{c_n}{(\zeta-z_0)}\, d\zeta = c_n$$

$\blacksquare$

SVILUPPO IN SERIE DI LAURENT

TEOREMA

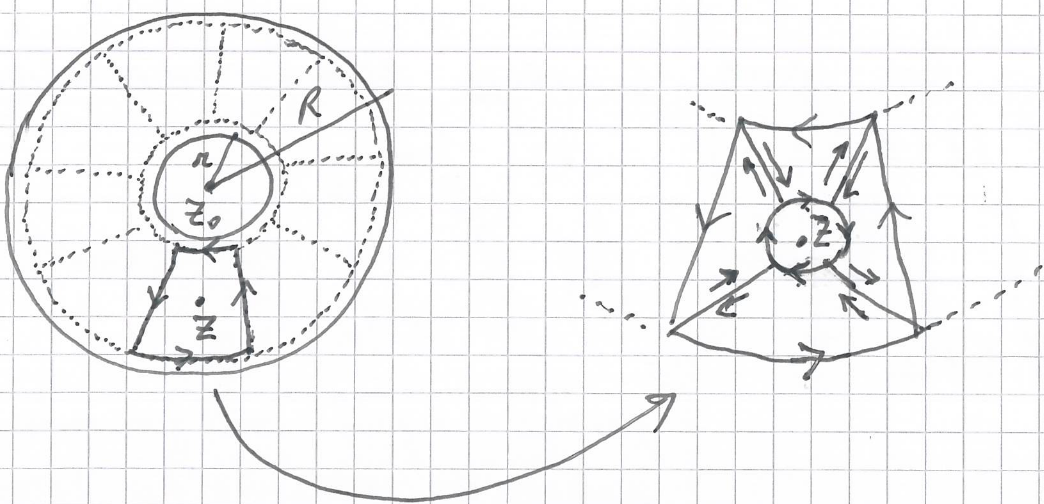
Sia f olomorfa sulla corona $\{r < |z - z_0| < R\}$

Allora
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

dove, per $r < \rho < R$, $\quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \, dz$

Dimostrazione

Sia z t.c. $r < |z - z_0| < R$ e sia $\delta > 0$ tale che
$$r + \delta < |z - z_0| < R - \delta .$$



Grazie alla formula di Cauchy, abbiamo:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z| = \varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = R - \delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r + \delta} \frac{f(\zeta)}{z - \zeta} \, d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = R-\delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta - z_0}} \, d\zeta$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r+\delta} \frac{f(\zeta)}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} \, d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = R-\delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta - z_0)^n} \, d\zeta$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r+\delta} \frac{f(\zeta)}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z-z_0)^n} \, d\zeta$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = R-\delta} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta \right) (z-z_0)^n$$

$$+ \sum_{n=-1}^{-\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r+\delta} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta \right) (z-z_0)^n \quad \blacksquare$$

COROLLARIO

$\forall \rho \quad r < \rho < R$, si ha

$$|c_n| \leq \frac{M}{\rho^n}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

dove $M = \max \{ |f(z)| : |z - z_0| = \rho \}$

(stime di Cauchy per i coefficienti di Laurent).

SERIE DI LAURENT VICINO A UNA SINGOLARITÀ ISOLATA

Se z_0 è una singolarità isolata di una funzione olomorfa f, allora $\exists\ \varepsilon > 0$ t.c. f è olomorfa in $D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\} = \{0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$.

Allora f può essere sviluppata in serie di Laurent nella corona $\{0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n .$$

La parte principale della serie di Laurent, cioè $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n}$ si dice parte principale di f in z_0.

Si ha:

a) z_0 è removibile $\Longleftrightarrow$ $c_{-n} = 0$ $\forall n = 1, 2, \dots$

b) z_0 è un polo di ordine $k \geq 1$ $\Longleftrightarrow$ $c_{-k} \neq 0$ e $c_{-n} = 0$ $\forall\ n > k$

c) z_0 è una singolarità essenziale $\Longleftrightarrow$ $c_{-n} \neq 0$ per infiniti valori di n.

TEOREMA

Se f ha una singolarità isolata in z_0 e f è limitata in un intorno di z_0, allora z_0 è una singolarità removibile.

Dim.

Per ipotesi, $\exists\, \varepsilon>0$, $\exists\, M>0$ t.c.

$|f(z)| \leq M \quad \forall z \in \{0<|z-z_0|<\varepsilon\}$.

Allora, per le stime di Cauchy, si ha

$$|c_n| \leq \frac{M}{r^n} \quad \forall n, \ \forall r \text{ con } 0<r<\varepsilon.$$

Per $r \to 0$, otteniamo $c_n=0$ $\forall n<0$, cioè la parte principale di f in z_0 è nulla. ▨.

TEOREMA DI CASORATI - WEIERSTRASS

Sia $f : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa, e sia z_0 una singolarità essenziale di f. Allora, $\forall\, \varepsilon>0$, $f(D(z_0,\varepsilon)\setminus\{z_0\})$ è denso in $\mathbb{C}$.

Dim.

Supponiamo per assurdo che $f(D(z_0,\varepsilon)\setminus\{z_0\})$ non sia denso in $\mathbb{C}$.

Allora $\exists\, w_0 \in \mathbb{C}$ e $\delta>0$ t.c.

$$D(w_0,\delta) \subseteq \mathbb{C} \setminus f(D(z_0,\varepsilon)\setminus\{z_0\})$$

Segue che

$$|f(z)-w_0| \geq \delta \quad \forall z \in D(z_0,\varepsilon)\setminus\{z_0\}$$

Allora $\dfrac{1}{f(z)-w_0}$ è olomorfa su $D(z_0,\varepsilon)\setminus\{z_0\}$

e inoltre $\left|\dfrac{1}{f(z)-w_0}\right| \leq \dfrac{1}{\delta} \quad \forall z \in D(z_0,\varepsilon)\setminus\{z_0\}$

Allora per il teorema precedente z_0 è una singolarità removibile di $\dfrac{1}{f(z) - w_0}$

Quindi $\exists \quad h \in H(D(z_0, \varepsilon)) \quad t.c.$

$$\frac{1}{f(z) - w_0} = h(z) \qquad \forall z \in D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$$

$\Rightarrow \quad f(z) - w_0 = \dfrac{1}{h(z)}$ ha al più un polo in z_0, assurdo. $\boxtimes$