INDICE DI AVVOLGIMENTO

Sia γ un cammino chiuso in $\mathbb{C}$. Sia $\Omega := \mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Per $z \in \Omega$ definiamo l'indice di avvolgimento di γ intorno a z

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

PROPOSIZIONE

$\mathrm{Ind}_\gamma(\cdot)$ è una funzione che assume solo valori interi. È costante su ogni componente connessa di Ω e assume il valore 0 sulla componente connessa illimitata di Ω.

Osservazione: γ^* è compatto $\Rightarrow$ $\exists$ un disco D t.c. $\gamma^* \subseteq D$.
$\mathbb{C} \setminus \overline{D}$ è connesso e aperto. Quindi $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$ è contenuto in qualche componente connessa di Ω. Quindi Ω ha un'unica componente connessa illimitata.

Dimostrazione della proposizione

Sia $\gamma : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{C}$ una parametrizzazione.

Sia $z \in \Omega$; allora

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha^\beta \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}\, ds$$

Ora osserviamo che, se $w \in \mathbb{C}$, allora $\frac{w}{2\pi i} \in \mathbb{Z}$
$\iff e^{w} = 1$.

Quindi $\mathrm{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z} \iff \varphi(\beta) = 1$, dove

$$\varphi(t) := e^{\int_\alpha^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}\, ds}, \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

Calcoliamo

$$\varphi'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\, \varphi(t).$$

quindi

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} - \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z} = 0$$

Segue che

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\varphi(t)}{\gamma(t)-z}\right) = 0$$

quindi $\frac{\varphi(t)}{\gamma(t)-z} \equiv \text{const}$ su $[\alpha, \beta]$

Poiché $\varphi(\alpha) = 1$, si ha

$$\frac{\varphi(t)}{\gamma(t)-z} = \frac{\varphi(\alpha)}{\gamma(\alpha)-z} = \frac{1}{\gamma(\alpha)-z}$$

Quindi $\varphi(t) = \frac{\gamma(t)-z}{\gamma(\alpha)-z}$

Allora $\varphi(\beta) = \frac{\gamma(\beta)-z}{\gamma(\alpha)-z} = 1$ perché $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$

e quindi abbiamo dimostrato che
$\mathrm{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$.

Ora è facile verificare che $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ è continua su Ω. Infatti, se $z_n \xrightarrow{n\to\infty} z$, allora

$$\frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z_n} \longrightarrow \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z} \quad \text{per } n\to\infty$$

uniformemente in $[\alpha,\beta]$, e la conclusione segue.

Ora, poiché l'immagine di un insieme connesso è connesso quando f è continua, allora $\mathrm{Ind}_\gamma(\cdot) \equiv \text{cost}$ su ogni componente connessa di Ω.

Infine, se $|z_n| \longrightarrow +\infty$, allora

$$|\mathrm{Ind}_\gamma(z)| = \left|\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z_n}\right| \leq \ell(\gamma) \sup_{\zeta\in\gamma^*} \frac{1}{|\zeta - z_n|}$$

$$= \ell(\gamma)\frac{1}{\mathrm{dist}(z_n,\gamma^*)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Ind}_\gamma(\cdot) \equiv 0$ sulla componente connessa illimitata di Ω. ▨

<u>ESEMPIO</u>

Sia $\gamma := a + re^{i\vartheta}$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$. Allora

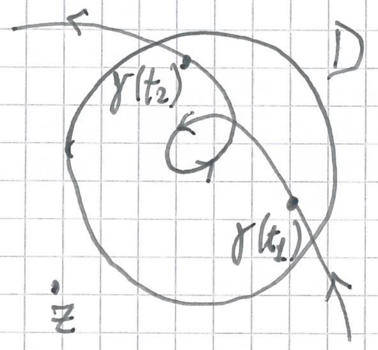
$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 1 & \text{se } |z-a|<r \\ 0 & \text{se } |z-a|>r. \end{cases}$$

Infatti, se $|z-a|<r$, allora

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \mathrm{Ind}_\gamma(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - a} = 1$$

Se $|z-a|>r$, $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$ perché sono nella componente connessa illimitata di $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$.

OSSERVAZIONE



Supponiamo che $D \subseteq \mathbb{C}$ sia un disco tale che $z \notin D$, e $\gamma(t) \in D$ per $t \in [t_1, t_2]$.

Vogliamo calcolare $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}\, dt$.

La funzione $\dfrac{1}{\zeta - z}$ ammette una primitiva in D (poiché D è convesso e $\dfrac{1}{\zeta - z}$ è olomorfa in D.

Chiamiamo $L(\zeta)$ tale primitiva.

Allora

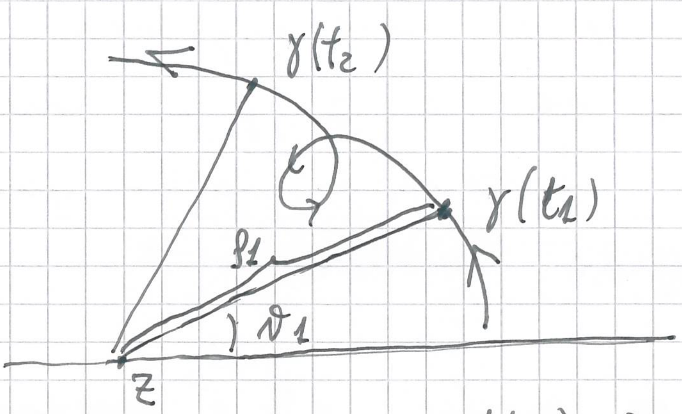
$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}\, ds = L(\gamma(t_2)) - L(\gamma(t_1)).$$

Ora osserviamo che

$$\frac{d}{d\xi} L(z + e^{\xi}) = L'(z + e^{\xi})\, e^{\xi} = \frac{1}{z + e^{\xi} - z} \cdot e^{\xi} = 1$$

$\Longrightarrow \exists\ \alpha \in \mathbb{C}$ t.c.

$$L(z + e^{\xi}) = \xi + \alpha.$$



Possiamo scrivere $\gamma(t_j) - z = \rho_j e^{i\vartheta_j}$ $\quad j=1,2$

Quindi

$$L(\gamma(t_j)) = L(z+\rho_j e^{i\vartheta_j}) = L(z+e^{(\log \rho_j + i\vartheta_j)})$$

$$= \log \rho_j + i\vartheta_j + \alpha \qquad j=1,2$$

Segue che

$$L(\gamma(t_2)) - L(\gamma(t_1)) = \log\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) + i(\vartheta_2 - \vartheta_1)$$

Questo significa che la parte immaginaria di $\int_{t_1}^{t_2} \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}\, ds$ è l'incremento dell'argomento di $\gamma(t)-z$ passando da t_1 a t_2.

Poiché γ^* è compatto, possiamo iterare questo argomento un numero finito di volte, in modo da coprire tutta la curva. (*) Si ottiene quindi che la parte reale di $\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$ è nulla,

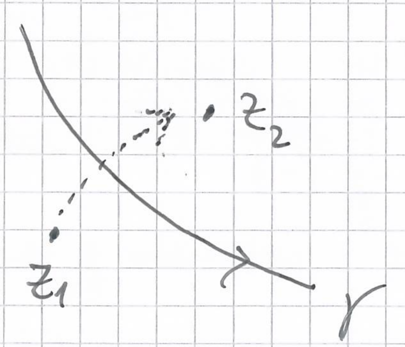
mentre la parte immaginaria

misura l'incremento dell'argomento di $\gamma(t) - z$ passando da α a β. Questo significa che $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ conta quante volte $\gamma(\cdot)$ gira intorno a z.

(✶) Infatti, poiché γ^* è compatto, $\exists\ r>0$ t.c. $\forall\ \zeta \in \gamma^*$, $D(\zeta, r) \not\ni z$ ($r = \mathrm{dist}(\gamma^*, z) > 0$).
Poiché γ è uniformemente continua, se la partizione $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = \beta$ è sufficientemente fitta, allora $d(\gamma(t), \gamma(t_i)) < r$ $\forall\ t \in [t_i, t_{i+1}]$ e quindi $\gamma(t) \in D(\gamma(t_i), r)$ $\forall\ t \in [t_i, t_{i+1}]$.

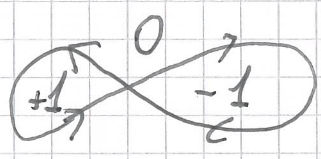
È utile avere un metodo efficiente per calcolare l'indice di un cammino chiuso intorno a un punto.
Dimostreremo un teorema che dice che l'indice aumenta di 1 quando si attraversa il cammino "da destra verso sinistra"

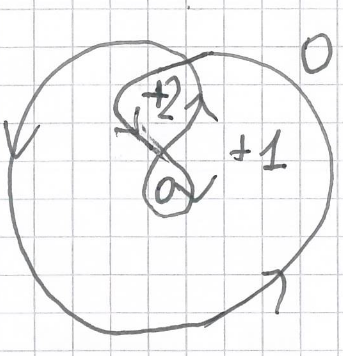
$$\mathrm{Ind}_\gamma(z_2) = \mathrm{Ind}_\gamma(z_1) + 1$$

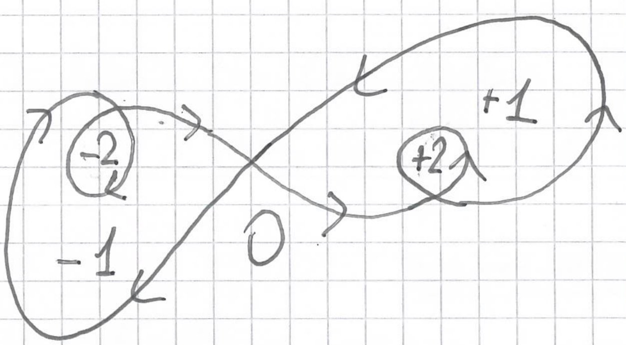


Poiché l'indice è 0 sulla componente connessa illimitata di $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$, se $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$ ha solo un numero finito di componenti connesse, si può determinare completamente l'indice di ogni punto.

ESEMPI







TEOREMA

Sia γ un cammino chiuso in $\mathbb{C}$ parametrizzato su $[\alpha, \beta]$. Siano $\alpha < u < v < \beta$; $a, b \in \mathbb{C}$, $|b| = r$ t.c.

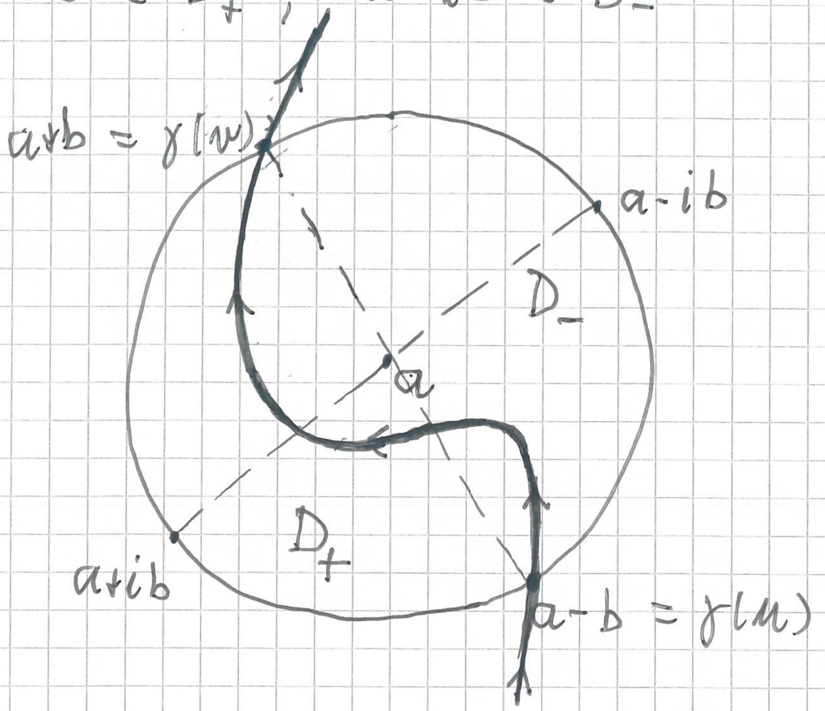
(i) $\gamma(u) = a - b \qquad \gamma(v) = a + b$

(ii) $|\gamma(s) - a| < r \iff u < s < v$

(iii) $|\gamma(s) - a| = r \iff s = u \lor s = v$

Inoltre, assumiamo che $D(a,r)\setminus\gamma^*$ sia l'unione di due regioni D_+ e D_-, etichettate in modo che

$a+ib \in \overline{D_+}$, $a-ib \in \overline{D_-}$



Allora $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \mathrm{Ind}_\gamma(w) + 1$
$\forall\ z \in D_+$, $w \in D_-$.

<u>Dimostrazione</u>

Possiamo riparametrizzare γ in modo che $u = 0$ e $v = \pi$.

Definiamo :

$C(s) := a - be^{is}$, $0 \leq s \leq 2\pi$

$$f(s) := \begin{cases} C(s) , & 0 \leq s \leq \pi \\ \gamma(2\pi - s) , & \pi \leq s \leq 2\pi \end{cases}$$

$$g(s) := \begin{cases} \gamma(s) , & 0 \leq s \leq \pi \\ C(s) , & \pi \leq s \leq 2\pi \end{cases}$$

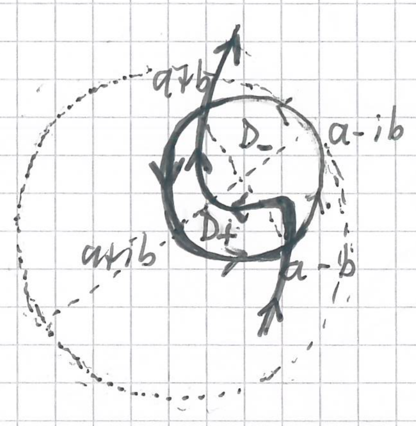
$$h(s) := \begin{cases} \gamma(s) , & \alpha \leq s \leq 0 \quad \text{o} \quad \pi \leq s \leq \beta \\ C(s) , & 0 \leq s \leq \pi \end{cases}$$

Si ha che f, g, h sono cammini chiusi.

Inoltre, $g^* \subseteq D(a+ib, 2r)$, e

$\frac{1}{z-(a-ib)}$ è olomorfa in $D(a+ib, 2r)$.

Quindi $\mathrm{Ind}_g(a-ib)=0$



Ora D_- è connesso, e $D_- \cap g^* = \emptyset$

Quindi $\mathrm{Ind}_g(w) = 0 \quad \forall\, w \in D_-$

In modo analogo, $\mathrm{Ind}_f(z) = 0 \quad \forall\, z \in D_+$

Allora abbiamo

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \mathrm{Ind}_h(z) = \mathrm{Ind}_h(w)$$

perché $\mathrm{Ind}_f(z)=0$

perché $z, w \in D(0,r)$, un aperto connesso che non interseca h^*

$$= \mathrm{Ind}_g(w) + \mathrm{Ind}_h(w) = \mathrm{Ind}_c(w) + \mathrm{Ind}_\gamma(w) =$$

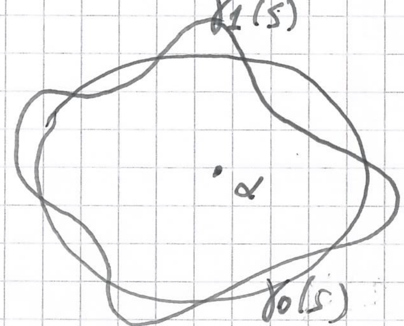
$$= 1 + \mathrm{Ind}_\gamma(w) \quad \blacksquare$$

IL LEMMA DEL CANE AL GUINZAGLIO

Siano $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{C}$ cammini chiusi. Si assume che $\alpha \in \mathbb{C}$ sia tale che

$$|\gamma_1(s) - \gamma_0(s)| < |\alpha - \gamma_0(s)| \quad , \ 0 \leq s \leq 1 \qquad (*)$$

Allora $\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(\alpha) = \mathrm{Ind}_{\gamma_0}(\alpha)$.



Dimostrazione.

Per prima cosa osserviamo che $(*) \Rightarrow \alpha \notin \gamma_0^*$ e $\alpha \notin \gamma_1^*$. Infatti

$$|\alpha - \gamma_1(s)| \geq |\alpha - \gamma_0(s)| - |\gamma_0(s) - \gamma_1(s)| > 0$$

Ora consideriamo

$$\gamma(s) := \frac{\gamma_1(s) - \alpha}{\gamma_0(s) - \alpha}$$

Si ha:

$$\frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)} = \frac{\gamma_1'(s)(\gamma_0(s) - \alpha) - \gamma_0'(s)(\gamma_1(s) - \alpha)}{(\gamma_0(s) - \alpha)^2} \cdot \frac{\gamma_0(s) - \alpha}{\gamma_1(s) - \alpha}$$

$$= \frac{\gamma_1(s)}{\gamma_1(s) - \alpha} - \frac{\gamma_0'(s)}{\gamma_0(s) - \alpha}$$

Inoltre,

$$|1-\gamma(s)| = \left|\frac{\gamma_0(s)-\gamma_1(s)}{\gamma_0(s)-\alpha}\right| < 1$$

quindi $\gamma^* \subseteq D(1,1)$ e quindi

$\mathrm{Ind}_\gamma(0) = 0$

Pertanto si ha:

$$0 = \mathrm{Ind}_\gamma(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)}\,ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\gamma_1'(s)}{\gamma_1(s)-\alpha}\,ds - \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\gamma_0'(s)}{\gamma_0(s)-\alpha}\,ds$$

$$= \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(\alpha) - \mathrm{Ind}_{\gamma_0}(\alpha) \qquad \blacksquare$$

Grazie a questo lemma, possiamo definire $\mathrm{Ind}_\gamma(\alpha)$ <u>per ogni curva chiusa continua γ</u> (ricordiamo che i "cammini" sono C^1 a tratti).

Sia $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ una curva continua chiusa. Se $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\gamma_n : [0,1] \to \mathbb{C}$ è una successione di cammini chiusi tali che $\gamma_n \xrightarrow{n\to\infty} \gamma$ uniformemente su $[0,1]$ e se $\alpha \notin \gamma^*$, allora $\alpha \notin \gamma_n^*$ per tutti gli n abbastanza grandi. Quindi possiamo considerare $\mathrm{Ind}_{\gamma_n}(\alpha)$.

Vedremo ora che $\mathrm{Ind}_{\gamma_n}(\alpha)$ si stabilizza per n grande. Più precisamente, $\exists\, \delta>0$, $\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}$, t.c. $\forall\, n, m \geq \bar{n}$, si ha

$$d(\gamma_n^*, \alpha) > \delta \quad \text{e} \quad \|\gamma_n - \gamma_m\|_\infty < \delta .$$

Segue che, $\forall\, s \in [0, 1]$

$$|\gamma_n(s) - \gamma_m(s)| < \delta < |\alpha - \gamma_n(s)| .$$

Per il teorema del cane al guinzaglio si ha allora

$$\mathrm{Ind}_{\gamma_n}(\alpha) = \mathrm{Ind}_{\gamma_m}(\alpha) \qquad \forall\, n, m \geq \bar{n} .$$

Se $(\tilde{\gamma}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è un'altra successione di cammini chiusi che convergono a γ uniformemente, allora $\exists\, \delta>0$ $\exists\, \bar{\bar{n}} \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall\, n \geq \bar{\bar{n}}$, $d(\gamma_n^*, \alpha) > \delta$, e $\|\tilde{\gamma}_n - \gamma\|_\infty < \delta/2$, $\|\gamma_n - \gamma\|_\infty < \delta/2$

Segue che, $\forall\, n \geq \bar{\bar{n}}$,

$$|\gamma_n(s) - \tilde{\gamma}_n(s)| < \delta < |\alpha - \gamma_n(s)| \qquad \forall\, n \geq \bar{\bar{n}}, \ \forall\, s \in [0, 1].$$

Quindi $\mathrm{Ind}_{\gamma_n}(\alpha) = \mathrm{Ind}_{\tilde{\gamma}_n}(\alpha) \quad \forall\, n \geq \bar{\bar{n}}$.

Allora possiamo definire

$$\mathrm{Ind}_\gamma(\alpha) := \lim_{n\to\infty} \mathrm{Ind}_{\gamma_n}(\alpha)$$

dove $(\gamma_n)_n$ è una qualunque successione di cammini chiusi che converge uniform. a γ.

L'esistenza di una successione di cammini chiusi che convergono uniformemente a γ si può dimostrare in vari modi. Ad esempio si può usare i mollificatori

$$\vartheta_n(x) = c_n \, \vartheta(nx) \qquad \text{dove}$$

$$\vartheta(y) := \begin{cases} e^{\frac{1}{y^2-1}} & \text{se } |y|<1 \\ 0 & \text{se } |y| \geq 1 \end{cases}$$

e c_n è una costante che normalizza ϑ_n, cioè $c_n = \left(\int \vartheta(nx)\, dx \right)^{-1}$

Si ha che $\vartheta_n \in C^\infty(\mathbb{R})$. Estendendo γ a $\mathbb{R}$ per periodicità e definendo

$$\gamma_n(s) := \int_{\mathbb{R}} \vartheta_n(t)\, \gamma(s-t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} \vartheta_n(s-p)\, \gamma(p)\, dp$$

si ha che γ_n è di classe C^∞, $\gamma_n \xrightarrow{n\to\infty} \gamma$ uniformemente in $[0,1]$, e γ_n è periodica di periodo 1.

Dalla definizione si vede che $\mathrm{Ind}_\gamma(\cdot)$ è definito in modo non ambiguo, assume valori interi, è costante in ogni componente connessa di $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, e vale 0 sulla componente connessa illimitata di $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

Inoltre, se $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ sono curve continue chiuse, $\alpha \in \mathbb{C}$ e

$$|\gamma_1(s) - \gamma_0(s)| < |\alpha - \gamma_0(s)| \qquad 0 \leq s \leq 1,$$

allora
$$\mathrm{Ind}_{\gamma_0}(\alpha) = \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(\alpha).$$
(cioè vale il lemma del cane al guinzaglio).

Infatti, poiché $[0,1]$ è compatto e γ_0 e γ_1 sono continue, $\exists\, k < 1$ t.c.

$$\left| \frac{\gamma_1(s) - \gamma_0(s)}{\alpha - \gamma_0(s)} \right| \leq k \qquad \forall\, s \in [0,1].$$

Siano
$$\gamma_1^n \xrightarrow{n\to\infty} \gamma_1 \quad \text{unif.}, \ \gamma_1^n \text{ cammini}$$
$$\gamma_0^n \xrightarrow{n\to\infty} \gamma_0 \quad \text{unif.}, \ \gamma_0^n \text{ cammini}$$

Sia $k < k' < 1$.
Allora, per n sufficientemente grande,

$$\left| \frac{\gamma_1^n(s) - \gamma_0^n(s)}{\alpha - \gamma_0^n(s)} \right| \leq k' \qquad \forall\, s \in [0,1].$$

Quindi

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ind}_{\gamma_0^n}(\alpha) & = & \mathrm{Ind}_{\gamma_1^n}(\alpha) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle n\to\infty} & & \Big\downarrow{\scriptstyle n\to\infty} \\ \mathrm{Ind}_{\gamma_0}(\alpha) & & \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(\alpha) \end{array}$$

e quindi $\mathrm{Ind}_{\gamma_0}(\alpha) = \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(\alpha)$.

OMOTOPIE

Siano $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to X$ due curve continue chiuse in uno spazio topologico X. Si dice che γ_0 e γ_1 sono omotope in X se e solo se esiste

$$H : [0,1] \times [0,1] \to X \quad \text{continua}$$

tale che:

$$(*) \quad H(s,0) = \gamma_0(s), \quad H(s,1) = \gamma_1(s)$$
$$H(0,t) = H(1,t) \qquad \forall s \in [0,1], \forall t \in [0,1]$$

Scriviamo $\gamma_t(s) := H(s,t)$, $(s,t) \in [0,1] \times [0,1]$.

La proprietà $(*)$ garantisce che $\{\gamma_t\}_{t \in [0,1]}$ è una famiglia di curve chiuse in X tali che "connettono" γ_0 e γ_1.

Se $\gamma_0^* = \{z_0\}$, diciamo che γ_1 è "contraibile".

Se in X ogni curva è contraibile, si dice che X è "semplicemente connesso".

ESEMPIO

Se $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ è stellato, allora è semplicemente connesso. Basta infatti definire

$$H(s,t) := t z_0 + (1-t)\gamma(s),$$ dove z_0 è il punto rispetto a cui Ω è stellato.

TEOREMA

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ e siano γ_0, γ_1 due curve chiuse. Supponiamo che γ_0 e γ_1 siano omotope in Ω. Sia $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Allora $Ind_{\gamma_0}(\alpha) = Ind_{\gamma_1}(\alpha)$.

Dimostrazione

Sia $H(s,t) = \gamma_t(s)$, $(s,t) \in [0,1] \times [0,1]$ l'omotopia che connette γ_0 e γ_1 in Ω.
$\exists\, \delta > 0$ tale che $|\alpha - H(s,t)| > \delta$ $\forall (s,t) \in [0,1] \times [0,1]$.

Fissiamo $\bar{t} \in [0,1]$. Allora $\exists\, \varepsilon > 0$ t.c. per $t \in [\bar{t} - \varepsilon, \bar{t} + \varepsilon] \cap [0,1]$,

$$\sup_{s \in [0,1]} |H(s,t) - H(s,\bar{t})| \leq \delta$$

Quindi, per $t \in [\bar{t} - \varepsilon, \bar{t} + \varepsilon] \cap [0,1]$ e $s \in [0,1]$, si ha $|\gamma_t(s) - \gamma_{\bar{t}}(s)| \leq \delta < |\alpha - \gamma_{\bar{t}}(s)|$ e quindi $Ind_{\gamma_t}(\alpha) = Ind_{\gamma_{\bar{t}}}(\alpha)$.
Quindi la mappa $t \mapsto Ind_{\gamma_t}(\alpha)$ è localmente costante in $[0,1]$ e quindi è costante (perché $[0,1]$ è connesso). $\blacksquare$