ANALISI COMPLESSA - esercizi - foglio 4

Esercizio 1. Classificare le singolarità di f in z_0:

(1) $f(z) = z^2 e^{-1/z^3}$, $z_0 = 0$;
(2) $f(z) = (z^2 + z)\cos(z^{-1})$, $z_0 = 0$;
(3) $f(z) = (z^2 + 1)^{-3}$, $z_0 = -i$.

Esercizio 2. Assumendo che la funzione f abbia un polo di ordine m nel punto z_0, verificare che la sua derivata f' ha un polo di ordiner $m + 1$ nello stesso punto.

Esercizio 3. Si supponga che f abbia un polo di ordine m in z_0 e che g abbia un polo di ordine n nello stesso punto. Dimostrare che $f + g$ o ha una singolarità eliminabile in z_0, oppure un polo di ordine non maggiore a $\max\{n, m\}$ in z_0.

Esercizio 4. Si considerino le seguenti funzioni olomorfe su $\mathbb{C}\backslash\{0\}$: $(1-\exp z)^{-1}$, $\exp(1/z)$, $\cos(1/z)$, $z^{-1}\sin z$. In ciascun caso si classifichi la singolarità. Se la singolarità è removibile, la si rimuova. Se la singolarità è un polo, si determini la parte principale della funzione nel polo. Se la singolarità è essenziale, si determini l'immagine di $D(0, \epsilon) \setminus \{0\}$ per $\epsilon > 0$ piccolo.

Esercizio 5. Scrivere la serie di Laurent di

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$$

nelle tre corone $\{0 < |z| < 1\}$, $\{1 < |z| < 2\}$ e $\{2 < |z|\}$.

Esercizio 6 Sia z_0 una singolarità isolata di f. Dimostrare che z_0 non può essere un polo di $\exp(f(\cdot))$. Suggerimento: se g ha un polo in z_0, allora g'/g necessariamente ha un polo di ordine 1 in z_0. Applicare questa proprietà alla funzione $\exp(f(\cdot))$, e trovare una contraddizione.

Esercizio 7 Determinare tutte le funzioni bi-olomorfe da $\mathbb{C}$ a $\mathbb{C}$. Suggerimento: utilizzando il teorema di Casorati-Weierstrass, dimostrare che se f è bi-olomorfa da $\mathbb{C}$ a $\mathbb{C}$, allora $z \mapsto f(1/z)$ non può avere una singolarità essenziale in 0. Ne segue che f deve essere un polinomio...