

ANALISI COMPLESSA – Esercizi – Foglio 5

Esercizio 1 Sia γ un cammino chiuso in \mathbb{C} . Verificare che $\text{Ind}_{\bar{\gamma}}(\bar{z}) = -\text{Ind}_{\gamma}(z)$ e che $\text{Ind}_{a\gamma+b}(az+b) = \text{Ind}_{\gamma}(z)$ per tutti gli $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$, dove $a \neq 0$ e b sono costanti.

Esercizio 2 Usando il teorema di Cauchy locale, determinare:

$$\int_{|z|=1} (z^2 + 2z)^{-1} dz; \quad \int_{|z+i|=3/2} (z^4 + z^2)^{-1} dz.$$

Esercizio 3. Quali valori può assumere l'integrale

$$\int_{\gamma} (1 + z^2)^{-1} dz$$

quando γ è un cammino chiuso in $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$? Quali valori può assumere l'integrale

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z(z^2 - 1)} dz$$

quando γ è un cammino chiuso in $\mathbb{C} \setminus \{0, 1, -1\}$?

Esercizio 4. Siano $n, k \in \mathbb{Z}$ e $0 < r \neq 1$. Determinare l'indice di avvolgimento della curva

$$\gamma(z) := \exp(ins) + r \exp(iks), \quad s \in [0, 2\pi]$$

rispetto al punto $z_0 = 0$.