# FOGLIO 4 – Svolgimento

## ES. 1

(1) $f(z) = z^2 e^{-1/z^3}$, $z_0 = 0$

$$f(z) = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-1)^n \frac{1}{z^{3n}} = z^2 \left(1 - \frac{1}{z^3} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^6} + \dots \right)$$

$$= z^2 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^4} + \dots$$

→ singolarità essenziale.

(2) $f(z) = (z^2 + z) \cos(z^{-1})$ $z_0 = 0$

$$= z(z+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{(2n)!} \left(\frac{1}{z}\right)^n$$

→ singolarità essenziale.

(3) $f(z) = (z^2 + 1)^{-3}$ $z_0 = -i$

$$f(z) = (z+i)^{-3} (z-i)^{-3}$$

$$= \frac{1}{(z+i)^3} \cdot \frac{1}{(z-i)^3}$$ → polo di ordine 3.

## ES. 2

$$f(z) = (z - z_0)^{-m} g(z) \qquad g(z_0) \neq 0.$$

$$f'(z) = -m (z - z_0)^{-m-1} g(z) + (z - z_0)^{-m} g'(z)$$

$$(z - z_0)^{m+1} f'(z) = \underbrace{-m\, g(z) + (z - z_0) g'(z)}_{\text{domorfa}}$$

$$(z - z_0)^{m} f'(z) = -m (z - z_0)^{-1} \underbrace{g(z)}_{g(z_0) \neq 0} + \underbrace{g'(z)}_{\text{domorfa}}$$

$\rightarrow$ $(z-z_0)^{m+1} f'(z)$ domorfa vicino a $z_0$

$(z-z_0)^{m} f'(z)$ ha polo di ordine 1 in $z_0$.

$\rightarrow$ $f'$ ha polo di ordine $(m+1)$ in $z_0$.

## $\boxed{\text{ES. 3}}$

$$f(z) = a_{-m}(z-z_0)^{-m} + \dots + a_{-1}(z-z_0)^{-1} + a_0 + \dots$$

$$g(z) = b_{-n}(z-z_0)^{-n} + \dots + b_{-1}(z-z_0)^{-1} + b_0 + \dots$$

se $m \neq n$,

$f+g$ ha polo di ordine $\mu = \max\{m, n\}$.

Se $m = n$,

$f+g$ ha al più un polo di ordine

$m = n = \max\{m, n\}$.

(Potrebbe anche avere una singolarità eliminabile se $a_{-j} = -b_{-j}$ $\forall j = 1, \dots, n$)

## $\boxed{\text{ES. 4}}$

•) $(1-\exp z)^{-1}$

$$z(1-\exp z)^{-1} \xrightarrow{z \to 0} 1$$

$\Rightarrow$ 0 polo di ordine 1

•) $z^{-1} \sin z \xrightarrow{z \to 0} 1$

singolarità rimovibile

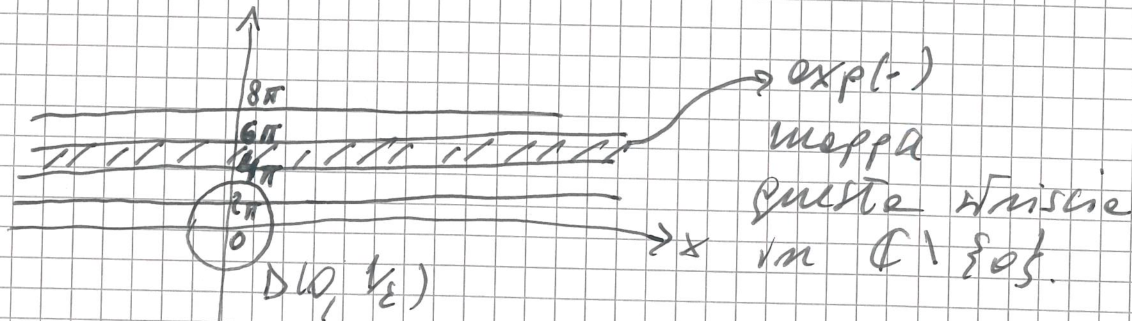
$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z} & z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases}$$

•) $\exp\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}$

singolarità essenziale.

$$f(D(0,\varepsilon)) = \left\{ \exp \frac{1}{z} \;\middle|\; |z| < \varepsilon \right\}$$

$$= \left\{ \exp w \;\middle|\; |w| > \frac{1}{\varepsilon} \right\} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$



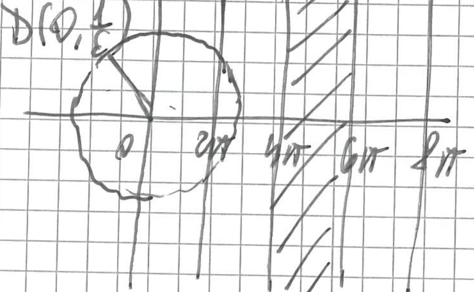

•) $\cos\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{1}{z^{2n}}$

singolarità essenziale.

$$\left\{ \cos \frac{1}{z} \;\middle|\; |z| < \varepsilon \right\} = \left\{ \cos w \;\middle|\; |w| > \frac{1}{\varepsilon} \right\}$$

$$= \left\{ \cos w \;\middle|\; w \in \mathbb{C} \right\}$$

perché $\cos w$ è periodico




calcoliamo $\{ \cos w \mid w \in \mathbb{C} \}$.

$$\cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} = \alpha$$

si risolve $\forall \alpha$, perché

pongo $e^{iw} := \omega$

$$\omega + \omega^{-1} = 2\alpha$$

$$\omega^2 - 2\alpha\omega + 1 = 0$$

ho almeno una soluzione $\tilde{\omega} \neq 0$

e di conseguenza trovo $w \in \mathbb{C}$.

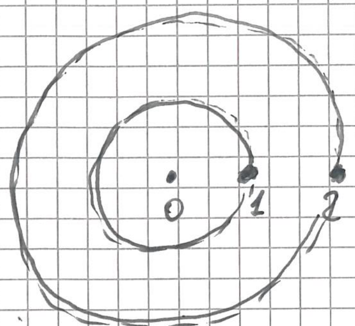
$$e^{iw} = \tilde{\omega}$$

e ho ottenuto che $\alpha$ sta nell'immagine di $\cos(\cdot)$.

Quindi $\{\cos w \mid w \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C}$.

$\boxed{\text{ES. 5}}$

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$$




Facendo la scomposizione in frazioni semplici, ottengo

$$f(z) = \frac{1/2}{z} + \frac{1}{1-z} - \frac{1/2}{2-z}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} - \frac{1}{4}\frac{1}{1-z/2}$$

in $0 < |z| < 1$,

$$f(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} z^n$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+2}}\right) z^n$$

in $1 < |z| < 2$

$$f(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{z} - \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1 - 1/z}\right) - \frac{1}{4}\frac{1}{1 - z/2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{z} - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} z^n$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} z^n$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{z} - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{z^n} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} z^n$$

in $|z| > 2$

$$f(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{z} - \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1 - 1/z}\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{z}\frac{1}{1 - 2/z}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{z} - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n + \frac{1}{2}\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} 2^n\left(\frac{1}{z}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\frac{1}{z^n}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty}\left(1 + 2^{n-2}\right)\frac{1}{z^n}$$

# ES. 6



## Passo 1

Se $g$ ha in $z_0$ un polo di ordine $m \geq 1$, allora $g(z) = (z-z_0)^{-m} h(z)$ $h$ olomorfa, $h(z_0) \neq 0$.

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{-m(z-z_0)^{-m-1} h(z) + (z-z_0)^{-m} h'(z)}{(z-z_0)^{-m} h(z)}$$

$$= \frac{-m}{z-z_0} + \frac{h'(z)}{h(z)}$$

olomorfa.

$\Longrightarrow \frac{g'}{g}$ ha in $z_0$ un polo di ordine $1$.

## Passo 2

Se $e^f$ avesse un polo in $z_0$

$\frac{(e^f)'}{e^f} = \frac{f' e^f}{e^f} = f'$ avrebbe in $z_0$ un polo di ordine $1$, ma questo è impossibile, perché $f'$ ha ovviamente una primitiva e quindi $\oint f' = 0$ su ogni cammino chiuso. $\boxtimes$

# ES. 7

## Passo 1

Se $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ è biolomorfa, allora

$z \mapsto f\left(\frac{1}{z}\right)$ non può avere una

singolarità essenziale in $0$.

Infatti se ce l'avesse, posto $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$

allora

$g(\{0 < |z| < 1\})$ sarebbe denso in $\mathbb{C}$

per Casorati - Weierstrass.

Inoltre $g(\{0 < |z| < 1\})$ è aperto.

Ora,

$$g(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = \mathbb{C} \setminus \{f(0)\}$$

quindi abbiamo:

- $g(\{0 < |z| < 1\})$ è aperto denso
- $g(\{|z| > 1\})$ è aperto.

Quindi $g(\{|z|>1\}) \cap g(\{0<|z|<1\}) \neq \emptyset$

ma questo non è possibile perché

$g$ è iniettiva.

## Passo 2

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \Rightarrow f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{z^n}$$

per il <u>passo 1</u> deve essere

$a_n = 0 \quad \forall\ n \geq \bar{n}$

quindi $f$ è un polinomio.

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_m z^m .$$

Se $m = 0$ $f$ non può essere iniettiva

Se $m \geq 1$ allora $f$ ha $m$ zeri contando le molteplicità.

Se almeno due sono distinti, violo l'iniettività

Se sono tutti coincidenti, allora

$f(z) = (z-a)^m$ che comunque

non è iniettiva, perché se poniamo

$$z_j = a + e^{i\frac{2\pi j}{m}} \qquad j = 1, \dots, m \text{ distinti}$$

$$\text{e} \qquad f(z_j) = e^{i 2\pi j} = 1$$

Ne segue che $f$ deve essere un polinomio di grado 1.

$$\boxed{\text{Le uniche funzioni biolomorfe da } \mathbb{C} \text{ a } \mathbb{C} \text{ sono quelle lineari.}}$$