CATENE E CICLI

Siano $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ cammini in $\mathbb{C}$.
Una "catena" è una somma formale

$$\Gamma := \alpha_1\gamma_1 \dotplus \alpha_2\gamma_2 \dotplus \dots \dotplus \alpha_n\gamma_n$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Z}$. ($\mathbb{Z}$-modulo libero)

Sia f continua su $\Gamma^* := \gamma_1^* \cup \dots \cup \gamma_n^*$

Allora definiamo

$$\int_\Gamma f(z)dz := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_{\gamma_i} f(z)dz$$

Diremo che due catene

$$\Gamma = \alpha_1\gamma_1 \dotplus \dots \dotplus \alpha_n\gamma_n \quad , \quad \tilde{\Gamma} = \tilde{\alpha}_1\tilde{\gamma}_1 \dotplus \dots \dotplus \tilde{\alpha}_m\tilde{\gamma}_m$$

sono equivalenti $\iff$

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_{\tilde{\Gamma}} f(z)\,dz$$

$\forall f \in C(\Gamma^* \cup \tilde{\Gamma}^*)$. Scriviamo $\Gamma \equiv \tilde{\Gamma}$.

Se ogni γ_i è un cammino chiuso, allora

$$\Gamma = \alpha_1\gamma_1 \dotplus \dots \dotplus \alpha_n\gamma_n$$

si dice CICLO.

Se Γ è un ciclo e $\alpha \notin \Gamma^*$, definiamo l'<u>indice</u> di Γ rispetto ad α

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha) := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dz}{z-\alpha} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, \mathrm{Ind}_{\gamma_i}(\alpha).$$

TEOREMA DI CAUCHY GLOBALE

Sia $f \in H(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto. Sia Γ un ciclo in Ω, tale che

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0 \quad \forall\, \alpha \notin \Omega.$$

Allora

(1) $$f(z) \cdot \mathrm{Ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

$\forall\, z \in \Omega \setminus \Gamma^*$.

(2) $$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$$

(3) Se Γ_0 e Γ_1 sono cicli in Ω tali che $\mathrm{Ind}_{\Gamma_0}(\alpha) = \mathrm{Ind}_{\Gamma_1}(\alpha)$ $\forall \alpha \notin \Omega$, allora

$$\int_{\Gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz.$$

<u>OSS.</u> L'ipotesi in (3) è soddisfatta ad esempio se Γ_0 e Γ_1 sono due cammini omotopi in Ω.

Per dimostrare il teorema di Cauchy globale, abbiamo bisogno del seguente lemma:

LEMMA

Sia $f \in H(\Omega)$. Si definisce $g : \Omega \times \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$

$$g(z,w) := \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(w)}{z-w} & \text{se } z \neq w \\ f'(z) & \text{se } z = w \end{cases}$$

Allora g è continua su $\Omega \times \Omega$.

Dim.

Gli unici punti da controllare sono quelli di tipo $(z,w) = (a,a)$.

Ora si ha:

$$g(z,w) - g(a,a) = \frac{f(z)-f(w)}{z-w} - f'(a) =$$

$$= \frac{1}{z-w} \int_0^1 \frac{d}{dt} f(w + t(z-w))\, dt - f'(a)$$

$$= \int_0^1 \left(f'(w + t(z-w)) - f'(a) \right) dt$$

Ora, poiché f' è continua, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0$ t.c. se $|\zeta - a| < \delta_\varepsilon$, allora $|f'(\zeta) - f'(a)| < \varepsilon$.

Quindi, se $|w-a| < \delta_\varepsilon$ e $|z-a| < \delta_\varepsilon$, allora

$$|w + t(z-w) - a| < \delta_\varepsilon \quad \forall\, t \in [0,1],$$

e quindi

$$|g(z,w) - g(a,a)| \leq \varepsilon. \qquad \blacksquare$$

Dimostrazione del teorema di Cauchy globale.

Definiamo

$$h(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma g(z, w)\, dw, \quad z \in \Omega.$$

Per $z \notin \Gamma^*$, la formula di Cauchy (1) è equivalente a $h(z) \equiv 0$.

> spoiler: per dimostrare che $h(z) \equiv 0$, dimostreremo che h si può estendere a una funzione olomorfa φ definita su tutto $\mathbb{C}$, tale che $\varphi(z) \to 0$ per $|z| \to \infty$. Allora per il teorema di Liouville avremo $\varphi \equiv 0$ e quindi $h \equiv 0$.

Innanzitutto dimostriamo che $h \in H(\Omega)$.
Poiché Γ^* è compatto e g è continua su $\Omega \times \Omega$, se $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di punti di Ω tale che $z_n \to z \in \Omega$ per $n \to \infty$, si ha che $g(z_n, w) \xrightarrow{n\to\infty} g(z, w)$ uniformemente rispetto a $w \in \Gamma^*$.
Pertanto, se $z_n \to z$ per $n \to \infty$, abbiamo

$$h(z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma g(z_n, w)\, dw \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma g(z, w)\, dw.$$

Quindi $h(\cdot)$ è continua in Ω.
Per dimostrare che è olomorfa utilizziamo il teorema di Morera.

Sia $\Delta \subseteq \Omega$ un triangolo. Allora si ha

$$\int_{\partial\Delta} h(z)\,dz = \int_{\partial\Delta}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} g(z,w)\,dw\right)dz \overset{\text{per Fubini Tonelli}}{=}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left(\int_{\partial\Delta} \underbrace{g(z,w)}\,dz\right)dw = 0$$

Per w fissato, $z \mapsto g(z,w)$ è olomorfa in $z \in \Omega$, perché la singolarità in $z = w$ è removibile.

Per il teorema di Morera segue che $h \in H(\Omega)$.

Ora, definiamo $\Omega_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0\}$

e $h_1(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$, $z \in \Omega_1$.

Nuovamente, applicando il teorema di Morera vediamo che $h_1 \in H(\Omega_1)$.

Ora, se $z \in \Omega \cap \Omega_1$, allora $h(z) = h_1(z)$, perché $\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0$.

Quindi possiamo costruire $\varphi \in H(\Omega_1 \cup \Omega)$ t.c. $\varphi|_\Omega = h$ e $\varphi|_{\Omega_1} = h_1$.

La nostra ipotesi $[\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0 \ \forall \alpha \notin \Omega]$ implica che $\mathbb{C}\setminus\Omega \subseteq \Omega_1$.

Pertanto si ha che $\Omega \cup \Omega_1 = \mathbb{C}$, e quindi $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Inoltre, Ω_1 contiene la componente connessa illimitata di $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$, perché ivi $\mathrm{Ind}_\Gamma(\cdot)$ è nullo. Pertanto

$$\lim_{|z|\to\infty} \varphi(z) = \lim_{|z|\to\infty} h_1(z) = 0$$

Per il teorema di Liouville quindi si ha che $\varphi(z) \equiv 0$. Questo dimostra (1).

La proprietà (2) si dimostra facilmente prendendo $a \in \Omega \setminus \Gamma^*$ arbitrariamente, e definendo

$$F(z) := (z-a)\, f(z) .$$

Allora, per (1),

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{F(z)}{z-a}\, dz = \underbrace{F(a)}_{=0} \mathrm{Ind}_\Gamma(a) = 0$$

Infine, (3) segue da (2) applicata al ciclo $\Gamma := \Gamma_1 \dot{-} \Gamma_0$. ▨

IL TEOREMA DEI RESIDUI

Richiamiamo la seguente definizione:

Definizione

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto. Una funzione f si dice "meromorfa in Ω" se e solo se $\exists\ A \subseteq \Omega$ tale che

(a) A non ha punti di accumulazione in Ω

(b) $f \in H(\Omega \setminus A)$

(c) f ha un polo in ogni punto di A.

Osservazione

(a) implica che ogni sottoinsieme compatto di Ω contiene solo un numero finito di punti di A e quindi A è al massimo numerabile.

Sia f meromorfa in Ω e sia $a \in A$. Sia

$$Q(z) := \sum_{k=1}^{m} c_{-k} (z-a)^{-k}$$

la parte principale di f in a. Allora $f - Q$ ha una singolarità removibile in a. Il coefficiente di Laurent c_{-1} si dice RESIDUO di f in a e si scrive

$$c_{-1} = \operatorname{Res}_a(f) = \operatorname{Res}(a; f).$$

Si noti che $\boxed{c_{-1} = \operatorname{Res}(f;a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} f(z)\,dz}$

dove r è sufficientemente piccolo.

Si noti anche che se Γ è un ciclo in Ω e $a \notin \Gamma^*$, allora

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma Q(z)\,dz = c_{-1} \operatorname{Ind}_\Gamma(a)$$
$$= \operatorname{Res}(f, a) \operatorname{Ind}_\Gamma(a)$$

TEOREMA DEI RESIDUI

Sia f meromorfa in Ω. Sia $A \subseteq \Omega$ l'insieme dei poli di f. Sia Γ un ciclo in $\Omega \setminus A$, tale che $\operatorname{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0 \quad \forall \alpha \notin \Omega$.

Allora

$$(1) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{a \in A} \operatorname{Res}(f;a) \operatorname{Ind}_\Gamma(a)$$

Dimostrazione.

Innanzitutto dimostriamo che la sommatoria a destra in (1) è su un numero finito di indici.

Sia $B := \{a \in A \mid \operatorname{Ind}_\Gamma(a) \neq 0\}$.

vogliamo dimostrare che B è finito.

Sia $W := \mathbb{C} \setminus \Gamma^*$.

$\operatorname{Ind}_\Gamma(z)$ è costante su ogni componente connessa V di W. Se V è illimitata o se $V \cap \Omega^c \neq \emptyset$, allora $\mathrm{Ind}_\Gamma(z)=0$ $\forall z \in V$.

Poiché A non ha punti di accumulazione in Ω, se B fosse infinito allora si accumulerebbe su $\partial\Omega$, dove l'indice è 0, oppure all'infinito, dove l'indice è ancora 0. Quindi B deve essere finito.

Sia quindi $B = \{a_1, \dots, a_n\}$.

Siano $Q_1, \dots, Q_n$ le parti principali di f in $a_1, \dots, a_n$ rispettivamente.
Poniamo $g := f - (Q_1 + \dots + Q_n)$.
Poniamo $\Omega_0 := \Omega \setminus (A \setminus B)$.
allora g ha singolarità removibili in $a_1, \dots, a_n$, e $\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha)=0$ $\forall \alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega_0$.

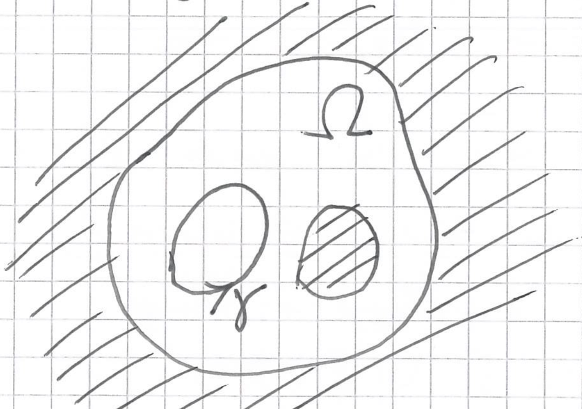
Quindi $\int_\Gamma g(z) = 0$. Segue che

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma Q_k(z)\,dz$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, a_k)\,\mathrm{Ind}_\Gamma(a_k). \qquad \blacksquare$$

L'INDICE DI ANNULLAMENTO DI UNA FUNZIONE OLOMORFA

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto e connesso. Sia γ un cammino chiuso in Ω, tale che $\mathrm{Ind}_\gamma(\alpha) = 0$ $\forall\, \alpha \notin \Omega$. Inoltre, supponiamo che $\mathrm{Ind}_\gamma(\alpha) \in \{0, 1\}$ $\forall\, \alpha \in \Omega \setminus \gamma^*$



Poniamo $\Omega_1 := \{\alpha \in \Omega \mid \mathrm{Ind}_\gamma(\alpha) = 1\}$.

Sia f meromorfa su Ω, e supponiamo che non abbia né zeri né poli su γ^*.

Sia N_z^f il numero degli zeri di f in Ω_1 (contando le molteplicità) e sia N_p^f il numero dei poli di f in Ω_1 (contando l'ordine). Allora

(a) $N_z^f - N_p^f = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$

(b) TEOREMA DI ROUCHÉ se f e g sono olomorfe in Ω e se $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ $\forall\, z \in \gamma^*$, allora $N_z^f = N_z^g$

Dimostrazione

La funzione $\varphi(z) := \frac{f'(z)}{f(z)}$ è meromorfa in Ω. Se $a \in \Omega$ e f ha uno zero di ordine $m = m(a)$ in a, allora

$f(z) = (z-a)^m h(z)$, dove h e $\frac{1}{h}$ sono olomorfe in un intorno di a.

In questo intorno

$$\varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m(z-a)^{m-1} h(z)}{(z-a)^m h(z)} + \frac{(z-a)^m h'(z)}{(z-a)^m h(z)}$$

$$= \frac{m}{z-a} + \frac{h'(z)}{h(z)}$$

$\Rightarrow \operatorname{Res}(\varphi; a) = m(a)$.

Se $a \in \Omega$ e f ha un polo di ordine $q = q(a)$ in a, allora

$f(z) = (z-a)^{-q} h(z)$, dove h e $\frac{1}{h}$ sono olomorfe in un intorno di a.

In questo intorno

$$\varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-q(z-a)^{-q-1} h(z)}{(z-a)^{-q} h(z)} + \frac{(z-a)^{-q} h'(z)}{(z-a)^{-q} h(z)}$$

$$= -\frac{q}{z-a} + \frac{h'(z)}{h(z)}$$

$\Rightarrow \operatorname{Res}(\varphi; a) = -q(a)$.

Allora, per il teorema dei residui,

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{\substack{a \text{ zero di} \\ f,\, a\in\Omega_1}} \mathrm{Res}(\varphi; a) + \sum_{\substack{a \text{ polo di} \\ f,\, a\in\Omega_1}} \mathrm{Res}(\varphi; a)$$

$$= \sum_{\substack{a \text{ zero di} \\ f,\, a\in\Omega_1}} m(a) - \sum_{\substack{a \text{ polo di} \\ f,\, a\in\Omega_1}} q(a)$$

$$= N_z^f - N_p^f$$

Questo completa la dimostrazione di (a).

Per dimostrare (b), basta applicare il teorema del cane al guinzaglio ai cammini chiusi

$$\tilde{\gamma}_0 := f\circ\gamma, \qquad \tilde{\gamma}_1 := g\circ\gamma,$$

osservando che

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \mathrm{Ind}_{\tilde{\gamma}_0}(0)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz = \mathrm{Ind}_{\tilde{\gamma}_1}(0)$$

$\blacksquare$