ANALISI COMPLESSA – Esercizi – Foglio 6

Esercizio 1 Siano $\alpha(t) := e^{it}$, $\beta(t) := (5/3) + e^{it}$, $\gamma(t) := -1 + 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Sia $U := \mathbb{C} \setminus \{2i, -2i\}$, e sia $\sigma := \alpha \dot{+} \beta \dot{+} \gamma$. Determinare se il ciclo σ è omologo a zero in U.

Esercizio 2 Siano α, β, γ come sopra. Siano $\sigma_1 := 2\alpha$, $\sigma_2 := \beta \dot{+} \gamma$. Sia $U := \{z \mid (1/5) < |z| < 5\}$. Determinare se σ_1 e σ_2 sono omologhi in U.

Esercizio 3. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto e semplicemente connesso (nel senso che ogni cammino chiuso in Ω è contraibile in Ω). Dimostrare che ogni $f \in H(\Omega)$ ammette una primitiva. (Suggerimento: fissare $z_0 \in \Omega$ e definire $F(z) := \int_\gamma f(\zeta) d\zeta$, dove γ è un qualunque cammino che congiunge z_0 a z).

Esercizio 4. Sia z_0 un polo di ordine 2 di f e sia

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

la serie di Laurent di f in z_0. Esprimere il residuo di f^2 in z_0 in termini di c_{-2}, c_{-1}, c_0 e c_1.

Esercizio 5. Sia

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

la rappresentazione in serie di potenze di una funzione $f \in H(\mathbb{C})$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ determinare

$$\operatorname{Res}_0 \frac{f(z) + f(1/z)}{z^n}.$$

Esercizio 6. Si consideri l'equazione

$$5z^3 + z^2 + 2z + 1 = 0.$$

Usando il Teorema di Rouché , determinare quante soluzioni di tale equazione appartengono alla regione $\{|z| < 1\}$.

Esercizio 7. Dimostrare il Teorema Fondamentale dell'Algebra utilizzando il Teorema di Rouché.