# CENNI SULL'OMOLOGIA DI UN APERTO $\Omega \subseteq \mathbb{C}$

Cominciamo con questo lemma

## LEMMA

Sia $K \subseteq \Omega$ un compatto contenuto in un aperto. Allora esiste un ciclo $\Gamma$ in $\Omega \setminus K$ tale che

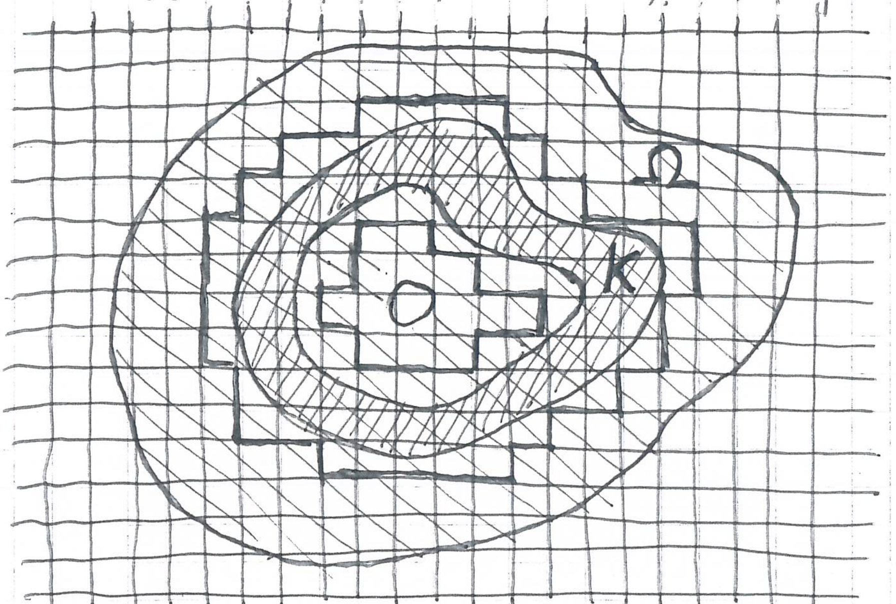
(i) $\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 1 \quad \forall z \in K$

(ii) $\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.

Dimostrazione (idea).

Poiché $K$ è compatto e $\Omega$ è aperto, $\exists \ \eta > 0$ tale che $\mathrm{dist}(z, K) \geq 2\eta \ \forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$

Costruiamo una griglia di rette verticali e orizzontali in $\mathbb{C}$, di passo $\eta$.

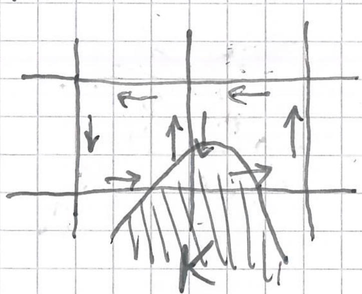



Solo un numero finito di quadrati chiusi $\overline{Q}_1, \dots, \overline{Q}_m$ intersecano $K$ e $\forall k = 1, \dots, m$, $\overline{Q}_k \subseteq \Omega$.

$\forall k$, orientiamo $\partial \overline{Q}_k$ in modo che

$$\operatorname{Ind}_{\partial \overline{Q}_k}(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha \in \mathring{Q}_k \\ 0 & \text{se } \alpha \notin \overline{Q}_k \end{cases}$$

Definiamo ora il ciclo $\tilde{\Gamma} := \partial \overline{Q}_1 \dotplus \dots \dotplus \partial \overline{Q}_m$.
Osserviamo che $\tilde{\Gamma} \equiv \Gamma$ dove $\Gamma$ si ottiene rimuovendo da $\tilde{\Gamma}$ tutti i lati che si cancellano a vicenda perché comuni a due quadrati contigui.
$\Gamma$ è un ciclo il cui supporto non interseca $K$. Infatti se il lato di un quadrato interseca $K$, allora lo stesso lato compare anche come lato del quadrato contiguo, con orientamento opposto, e quindi si cancellano.




Se $a \in K$, allora $a \in \overline{Q}_k$ per qualche $k$. Se $a \in \mathring{Q}_k$, allora immediatamente si ha $\operatorname{Ind}_\Gamma(a) = \operatorname{Ind}_{\tilde{\Gamma}}(a) = \operatorname{Ind}_{\partial \overline{Q}_k}(a) = 1$

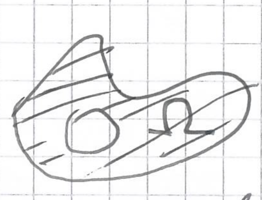
Se invece $a \in \partial \overline{Q}_k$, allora è punto limite di punti di $\mathring{Q}_k$ e per la continuità dell'indice di avvolgimento abbiamo $\operatorname{Ind}_\Gamma(a) = 1$.

Infine, se $a \notin \Omega$, allora $\mathrm{Ind}_{\partial \Omega_k} = 0$ $\forall k$ e quindi $\mathrm{Ind}_{\Gamma}(a) = \mathrm{Ind}_{\tilde{\Gamma}}(a) = 0$. $\blacksquare$

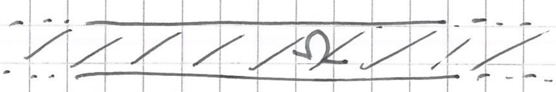
<u>Definizione</u>

Un aperto connesso (regione) $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ si dice "<u>semplicemente connesso</u>" (2) se e solo se $\mathbb{C}' \setminus \Omega$ è connesso, dove $\mathbb{C}' = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.


semplicemente connesso




non semplicemente connesso.




semplicemente connesso

<u>OSSERVAZIONE</u>

Vedremo in seguito che questa definizione è equivalente a quella data con le omotopie, ovvero "$\Omega$ semplicemente connesso sse ogni cammino chiuso è contraibile" (<u>semplicemente connesso (1)</u>)

Abbiamo infatti il seguente teorema.

## TEOREMA

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ connesso. Allora $\Omega$ è semplicemente connesso (2) $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0$ $\forall$ ciclo $\Gamma$ in $\Omega$ e $\forall\, \alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.

## Dimostrazione

"$\Longrightarrow$". Se $\Omega$ è semplicemente connesso (2), allora $\mathbb{C}' \setminus \Gamma^* \supseteq \underbrace{\mathbb{C}' \setminus \Omega}_{\text{connesso}}$

Quindi $\mathbb{C}' \setminus \Omega$ è contenuto in una ed una sola delle componenti connesse di $\mathbb{C}' \setminus \Gamma^*$, esattamente quella che contiene $\infty$.

Quindi $\mathbb{C} \setminus \Omega$ è contenuto nella componente connessa illimitata di $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ e quindi $\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0$ $\forall\, \alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.

"$\Longleftarrow$". Supponiamo che $\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0$ $\forall$ ciclo $\Gamma$ in $\Omega$ e $\forall\, \alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Supponiamo che $\Omega$ non sia semplicemente connesso (2). Allora $\mathbb{C}' \setminus \Omega$ è unione di due chiusi disgiunti $A$ e $B$ entrambi non vuoti.

Di questi uno ed uno solo contiene $\infty$, diciamo $A$.

Sia $\tilde{\Omega} := \mathbb{C}' \setminus A$. $\tilde{\Omega} \subseteq \mathbb{C}$ è aperto.

Inoltre $\tilde{\Omega} = \Omega \cup B$, quindi $B \subseteq \tilde{\Omega}$.
$B$ è compatto perché chiuso e limitato.

Applico allora il lemma precedente a $B$ e $\tilde{\Omega}$ e ottengo l'esistenza di un ciclo $\Gamma$ in $\tilde{\Omega} \setminus B = \Omega$ t.c.
$\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha) = 1 \quad \forall\, \alpha \in B \subseteq \mathbb{C} \setminus \Omega$.
Ciò contraddice l'ipotesi. $\blacksquare$

## OSSERVAZIONE

Abbiamo visto che l'indice è invariante per omotopie. Segue che se ogni curva chiusa $\gamma$ è contraibile, allora $\mathrm{Ind}_\gamma(\alpha) = 0 \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, e quindi $\Omega$ è semplicemente connesso (2)

$\boxed{\text{ogni curva è contraibile [sempl. connesso (1)]}} \Longrightarrow \boxed{\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0 \ \forall \text{ ciclo } \Gamma \text{ e } \forall \alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega \text{ [sempl. connesso (2)]}}$

$\boxed{\mathbb{C} \setminus \Omega \text{ ha una sola componente connessa}} \Longleftrightarrow \boxed{\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0 \ \forall \text{ ciclo } \Gamma \text{ e } \forall \alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega \text{ [sempl. connesso (2)]}}$

Per chiudere l'equivalenza tra le tre proprietà serve il teorema delle mappe di Riemann.

Definizione

Un ciclo $\Gamma$ in $\Omega$ si dice "omologo" a 0
$\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Ind}_\Gamma(a) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.
Si scrive $\Gamma \sim 0$.
Se $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$ sono cicli in $\Omega$, si dice che $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$ sono omologhi (si scrive $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$)
$\Longleftrightarrow$ $\Gamma_1 \dot{-} \Gamma_2 \sim 0$.

Se $G$ è il gruppo abeliano ($\mathbb{Z}$-modulo) dei cicli in $\Omega$, il quoziente $G/\sim$ si dice "(primo) gruppo di omologia di $\Omega$". #

Se una regione è semplicemente connessa, allora $G/\sim$ è il gruppo banale, $G/\sim = \{0\}$.

Se una regione non è semplicemente connessa, allora è detta "molteplicemente connessa". Più precisamente, si dice che "$\Omega$ ha connettività $n$" sse $\mathbb{C}' \setminus \Omega$ ha esattamente $n$ componenti connesse.
Si dice che "$\Omega$ ha connettività infinita" $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{C}' \setminus \Omega$ ha infinite componenti connesse.

Se $\Omega$ ha connettività finita $n$, siano $A_1, \dots, A_n$ le componenti connesse di $\mathbb{C}' \setminus \Omega$, e supponiamo che $\infty \in A_n$. Se $\Gamma$ è un ciclo in $\Omega$, allora

| $\mathrm{Ind}_\Gamma(\cdot)$ è costante su ciascuna $A_i$, e vale 0 su $A_n$ |

Inoltre, grazie al lemma a pag. 100, si possono trovare cicli $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{n-1}$ in $\Omega$ tali che

$$\mathrm{Ind}_{\Gamma_i}(a) = \begin{cases} 1 & \text{se } a \in A_i \\ 0 & \text{se } a \in A_k,\ k \neq i. \end{cases}$$

Dato un ciclo $\Gamma$ in $\Omega$, si ha che $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, $z$ ha indice $0$ rispetto al ciclo

$$\Gamma \dot{-} \left( \mathrm{Ind}_\Gamma(A_1)\Gamma_1 \dot{+} \dots \dot{+} \mathrm{Ind}_\Gamma(A_{n-1})\Gamma_{n-1} \right)$$

cioè $$\Gamma \sim \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{Ind}_\Gamma(A_i)\,\Gamma_i$$

Così ogni ciclo è omologo a una combinazione di $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$.

Questa è la base di omologia per $\Omega$.

$G/\sim$ è un $\mathbb{Z}$-modulo di dimensione $n-1$.

<u>OSSERVAZIONE</u>

Sia $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ una base di omologia per $\Omega$.

Consideriamo $H^\times(\Omega) := \{ f \in H(\Omega) \mid f(z) \neq 0 \ \forall z \}$ munito di struttura moltiplicativa.

Consideriamo l'applicazione

$$\underset{(H^\times(\Omega),\,\cdot)}{\overset{\displaystyle f}{\cap}} \longmapsto \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f'}{f}\,dz, \dots, \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{f'}{f}\,dz\right) \in (\mathbb{Z}^n,+)$$

si verifica che si tratta di un'applicazione lineare. È suriettiva. Infatti, se $f$ è meromorfa su $\mathbb{C}$, $\int_{\gamma_i}\frac{f'}{f}\,dz = N_z - N_p$

dove $N_z$ e $N_p$ sono rispettivamente il numero di zeri e il numero di poli di $f$ racchiusi da $\gamma_i$. È facile quindi costruire una funzione meromorfa t.c. $\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j}\frac{f'}{f}\,dz\right)_{j=1,\dots,n} = (\lambda_1,\dots,\lambda_n)$

$\forall\ (\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{Z}^n$.

Il nucleo di questa applicazione è

$$\exp(H(\Omega)) := \{f\in H(\Omega) \mid \exists\, g\in H(\Omega),\ f=\exp g\}$$

Infatti se $\int_\gamma \frac{f'}{f}\,dz = 0$ $\forall$ ciclo $\gamma$ in $\Omega$, allora $\exists\ \tilde{g}\in H(\Omega)$ t.c. $\tilde{g}' = \frac{f'}{f}$.

Allora $g := \tilde{g}+a$ soddisfa

$$(fe^{-g})' = (f' - f\tilde{g}')\,e^{-g} = 0$$

$$\Rightarrow fe^{-g} \equiv \text{const} \equiv 1 \quad \text{se } a \text{ è opportuno.}$$

Allora si ha

$$\frac{H^{\times}(\Omega)}{\exp(H(\Omega))} \simeq \mathbb{Z}^n \simeq \boxed{G(\Omega)/\sim}$$

gruppo di omologia

$n$ si dice "primo numero di Betti di $\Omega$".

N.B. I gruppi sono invarianti per trasformazioni conformi.

## CARATTERIZZAZIONE DEGLI APERTI SEMPLICEMENTE CONNESSI

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un aperto connesso. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti.

a) $\Omega$ è omeomorfo a $D(0,1)$.

b) In $\Omega$ ogni curva chiusa è contraibile

c) $Ind_\gamma(\alpha) = 0$ $\forall$ cammino chiuso $\gamma$ in $\Omega$ e $\forall\, \alpha \in \mathbb{C}' \setminus \Omega$.

d) $\mathbb{C}' \setminus \Omega$ è connesso

e) $\forall\, f \in H(\Omega)$ e $\forall$ cammino chiuso $\gamma$ in $\Omega$, $\int_\gamma f\, dz = 0$

f) $\forall\, f \in H(\Omega)$ $\exists\, F \in H(\Omega)$ $|$ $F' = f$

g) Se $f$ e $1/f \in H(\Omega)$, allora $\exists\, g \in H(\Omega)$ t.c. $f = \exp g$

h) Se $f$ e $1/f \in H(\Omega)$, allora $\exists\, \varphi \in H(\Omega)$ t.c. $f = \varphi^2$.

Dim.

$$a) \xRightarrow{\text{ovvio}} b) \xRightarrow{\text{invarianza di Ind. per omotopie}} c) \xRightarrow{\text{teorema di Cauchy}} e \xRightarrow{F(z)=\int_{\gamma_{z_0 z}} f(\zeta)\,d\zeta} f)$$

$$c) \Longleftrightarrow d$$

$$f) \xRightarrow{\text{risolvo } g' = f'/f} g) \xRightarrow{\text{pongo } \varphi = e^{\frac{1}{2}g} \text{ dove } f = e^g} h)$$

Per mostrare che h) ⇒ a) ci sono due casi.

•) se $\Omega = \mathbb{C}$ basta porre $z \mapsto \frac{z}{1+|z|}$ e ho un omeomorfismo $\mathbb{C} \xleftrightarrow{\sim} D(0,1)$. senza nemmeno usare la condizione h).

•) se $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ c'è il teorema di Riemann.

Il teorema di Riemann dice che se $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ è un aperto semplicemente connesso (secondo una qualsiasi delle tre definizioni c), d), e)), allora $\Omega$ è bi-olomorficamente equivalente a $D(0,1)$.

La dimostrazione usa solo la proprietà h), quindi il teorema di Riemann permette di chiudere tutta la catena di implicazioni.

Per dimostrare il teorema della mappa di Riemann sono necessari vari risultati sulle successioni di funzioni olomorfe.