FOGLIO 8 - svolgimento

$\boxed{\text{ES. 1}}$

$$\varphi(z) = \frac{1+z}{1-z} \qquad \frac{1+z}{1-z} = w \qquad (1+z) = w(1-z)$$

$$(1+w)z = w-1$$

$$z = \frac{w-1}{w+1}$$

segue che

$\varphi : \mathbb{C} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ è biiettiva,

con inversa $\varphi^{-1}(w) = \dfrac{w-1}{w+1}$.

il che dimostra 1).

Per dimostrare 2), osserviamo che

$$\varphi(e^{i\vartheta}) = \frac{1+e^{i\vartheta}}{1-e^{i\vartheta}} = \frac{e^{-i\vartheta/2}+e^{i\vartheta/2}}{e^{-i\vartheta/2}-e^{i\vartheta/2}}$$

$$= \frac{1}{i}\,\frac{\cos\vartheta/2}{-\sin\vartheta/2} = \frac{\cos\vartheta/2}{\sin\vartheta/2}\, i$$

$$= \cot(\vartheta/2)\, i$$

quindi φ mappa $\{|z|=1\} \setminus \{1\}$ biiettivamente su $\mathrm{Re}\, w = 0$.

Per dimostrare 3, osserviamo che

$\varphi(0) = 1$, quindi $\varphi(D(0,1)) \subseteq \{\mathrm{Re}\, w > 0\}$

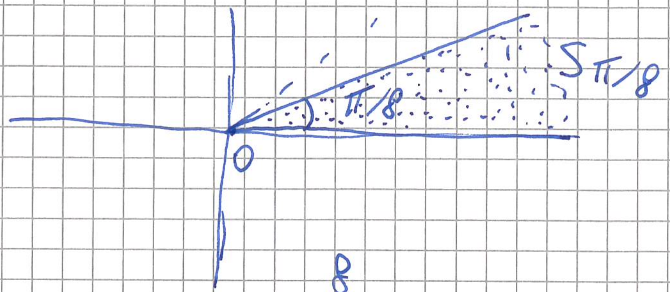
e $\varphi(\mathbb{C} \setminus \overline{D(0,1)}) \subseteq \{\mathrm{Re}\, w < 0\}$

Per la biiettività di φ deve essere

$$\varphi(D(0,1)) = \{\mathrm{Re}\, w > 0\}.$$

ES. 2

$$S_{\pi/8} = \{ re^{i\vartheta} \mid r>0 \quad 0<\vartheta<\pi/8 \}$$



La mappa $\varphi_1(z) = z^8$ mappa $S_{\pi/8}$ su $\operatorname{Im} z > 0$.

La rotazione $\varphi_2(w) = e^{-i\pi/2} w$ mappa $\operatorname{Im} w > 0$ in e su $\operatorname{Re} w > 0$.

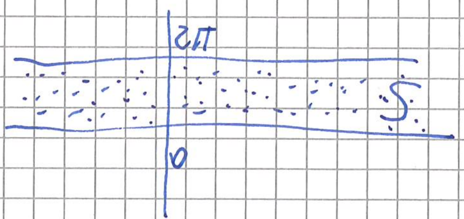
Infine la mappa $\varphi_3(\zeta) = \dfrac{\zeta - 1}{\zeta + 1}$ dell'esercizio precedente mappa $\operatorname{Re} w > 0$ in e su $D(0,1)$.

La mappa Φ cercata è $\Phi = \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1$

$$\Phi(z) = \frac{e^{-i\pi/2} z^8 - 1}{e^{-i\pi/2} z^8 + 1} = \frac{z^8 - e^{i\pi/2}}{z^8 + e^{i\pi/2}}$$

ES. 3

$$S = \{ z \mid 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi \}$$



$\varphi_1(z) = e^z$ mappa S in e su $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$.

$\varphi_2(w) = w^{1/2}$ mappa $\mathbb{C}\setminus[0,+\infty[$

in e su $\operatorname{Im}\zeta > 0$.

$\varphi_3(\zeta) = e^{-i\pi/2}\zeta$ mappa $\{\operatorname{Im}\zeta > 0\}$

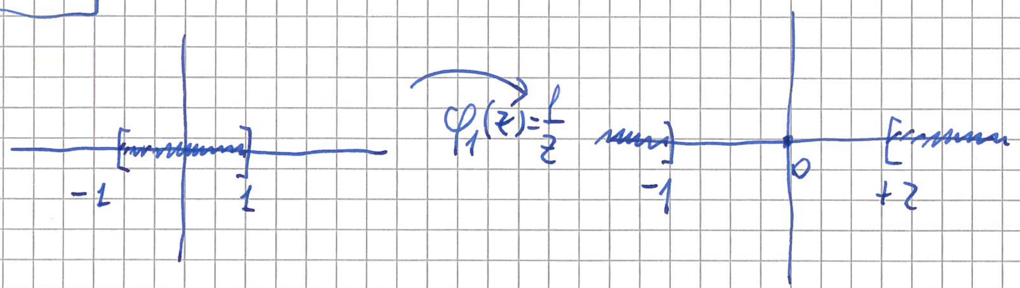
in e su $\operatorname{Re}(\eta) > 0$

$\varphi_4(\eta) := \dfrac{\eta - 1}{\eta + 1}$ mappa $\operatorname{Re}\eta > 0$
in e su $D(0,1)$.

La mappa cercata è $\Phi = \varphi_4 \circ \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1$

$$\Phi(z) = \frac{e^{-i\pi/2} e^{\frac{1}{2}z} - 1}{e^{-i\pi/2} e^{\frac{1}{2}z} + 1} = \frac{e^{z/2} - e^{i\pi/2}}{e^{z/2} + e^{i\pi/2}}$$

$\boxed{\text{ES. 4}}$



$\varphi_1(z)$ mappa biettivamente $\mathbb{C}\setminus[-1,+1]$
in e su $\mathbb{C}\setminus(\{0\}\cup[1,+\infty[\,\cup\,]-\infty,-1])$

L'aperto $\Omega := \mathbb{C}\setminus([1,+\infty[\,\cup\,]-\infty,-1])$
grazie al teorema della mappa di Riemann è biolomorficamente equivalente a $D(0,1)$. In particolare,
$\exists\ \varphi_2 : \Omega \to D(0,1)$ t.c. $\varphi_3(0) = 0$
↳ biolomorfa.

(5)

Allora $\Phi := \varphi_2 \circ \varphi_1$ mappa biolomorficamente

$\mathbb{C} \setminus [-1, +1]$ in e su $D(0, 1) \setminus \{0\}$