FUNZIONI ARMONICHE

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto. Una funzione $u : \Omega \to \mathbb{R}$ si dice armonica $\Longleftrightarrow$

1) $u \in C^2(\Omega)$
2) $\Delta u = 0$, dove $\Delta u := u_{xx} + u_{yy}$.

PROPOSIZIONE

Sia $f = u + iv : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $f \in H(\Omega)$ (cioè f olomorfa). Allora u e v sono funzioni armoniche.

Dim.

f olomorfa $\Longrightarrow f \in C^\infty$. Inoltre valgono le equazioni di Cauchy-Riemann.

$$\begin{cases} u_x = v_y & (*) \\ u_y = -v_x & (**) \end{cases}$$

Segue che $u_{xx} \underset{\boxed{\text{per } (*)}}{=} v_{yx} \underset{\boxed{\text{Schwarz-Eulero}}}{=} v_{xy} \underset{\boxed{\text{per } (**)}}{=} -u_{yy}$

e quindi $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Analogamente,

$v_{yy} = u_{xy} = u_{yx} = -v_{xx}$

e quindi $v_{xx} + v_{yy} = 0$ $\square$

Def (armonica coniugata)

Sia $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c. $\Delta u = 0$.

Una funzione armonica $v : \Omega \to \mathbb{R}$ si dice coniugata di u $\iff$ $u + iv \in H(\Omega)$.

ESEMPI

1) $u(x+iy) = x$ $\quad \Delta u = 0 \quad z = x+iy \in \mathbb{C}$

ammette un'armonica coniugata, specificamente $v(x,y) := y$.
Infatti $\Delta v = 0$ e
$u + iv = z$ che è olomorfa.

2) $u(x+iy) = x^2 - y^2 \quad z = x+iy \in \mathbb{C}$
si ha $u_{xx} - u_{yy} = 2 - 2 = 0$
quindi u è armonica.
Se prendiamo $v(x+iy) = 2xy$
si ha $v_{xx} + v_{yy} = 0$, quindi v è armonica. inoltre
$u + iv = x^2 - y^2 + 2xyi = (x+iy)^2 = z^2$
e quindi $u+iv$ è olomorfa.

3) $u(x+iy) = \log|z| = \frac{1}{2} \log(x^2+y^2)$

$z = x+iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

si ha che

$$u_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \qquad u_{xx} = \frac{2(x^2+y^2)-4x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$u_y = \frac{2y}{x^2+y^2} \qquad u_{yy} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$\Rightarrow$ $u_{xx}+u_{yy}=0$. $\Rightarrow$ u è armonica.

Osserviamo che se S è una semiretta che parte da 0 e $Log_{(S)}$ è un ramo di logaritmo su $\mathbb{C}\setminus S$, allora

$Log_{(S)}z = \log|z| + i Arg_{(S)}z$ è olomorfa su $\mathbb{C}\setminus S$, quindi necessariamente $Arg_{(S)}z$ è un'armonica coniugata di u su $\mathbb{C}\setminus S$.

Tuttavia non esiste un'armonica coniugata di u su tutto $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Infatti se $\exists\, \varphi : \mathbb{C}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$u + i\varphi \in H(\mathbb{C}\setminus\{0\})$, allora

$\nabla(\varphi - Arg_{(S)}) \equiv 0$ su $\mathbb{C}\setminus S$

e quindi $\varphi - Arg_{(S)} \equiv$ cost su $\mathbb{C}\setminus S$

$\Rightarrow$ $Arg_{(S)}$ si potrebbe estendere su $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ assurdo.

TEOREMA

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ semplicemente connesso, e sia $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ armonica. Allora esiste un'armonica coniugata v di u su Ω.

Dim.

Sia $f(x+iy) := u_x(x+iy) - u_y(x+iy)\, i$

Si ha $(f_1)_x = u_{xx} \quad (f_1)_y = u_{xy}$

$(f_2)_x = -u_{yx} \quad (f_2)_y = -u_{yy}$

Segue che $(f_1)_x = (f_2)_y$ per ipotesi,

$(f_2)_x = -(f_1)_y$ per Schwartz-Eulero.

Quindi $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Poiché Ω è semplicemente connesso, esiste una primitiva F di f, $F' = f$.

Si ha che $F = U + iV$ e

$F' = U_x - i U_y = f = u_x - i u_y$

Segue che $\nabla(U - u) = 0$ da cui

$U = u + \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow u + iV = F - \alpha \in \mathcal{H}(\Omega)$

$\Rightarrow V$ è un'armonica coniugata di u. ☒

CONSEGUENZE

PRINCIPIO DEL VALOR MEDIO

Sia $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ armonica, sia $z_0 \in \Omega$
e sia $r > 0$ t.c. $\overline{D(z_0, r)} \subseteq \Omega$.
Allora
$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it})\, dt$$

Dim.

Sia $r' > r$ t.c. $D(z_0, r') \subseteq \Omega$ e sia v un' armonica coniugata di u su $D(z_0, r')$.
Definiamo $f(z) := u(z) + iv(z)$.
Poiché $f \in H(D(z_0, r'))$, si ha
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\, dt$$
grazie al principio del valor medio per funzioni olomorfe. Separando la parte reale, si ottiene la tesi. $\boxtimes$

PRINCIPIO DEL MASSIMO

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, e sia u armonica, non cost., su Ω. Allora u non ha massimi locali in Ω.

Dim.

Supponiamo che z_0 sia un massimo locale.

Allora $\exists\ \rho > 0$ t.c. $u(z) \leq u(z_0)$ $\forall z \in D(z_0, \rho)$.

Per ogni $0 \leq r < \rho$ si ha

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it})\, dt$$

ora $u(z_0 + re^{it}) \leq u(z_0)$ $\forall t$

e quindi se $u(z_0 + re^{it^*}) < u(z_0)$ per qualche t^*, si avrebbe

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it})\, dt < u(z_0)$$

Quindi deve essere $u(z_0 + re^{it}) = u(z_0)$ $\forall t$. Lo stesso ragionamento si ripete $\forall$ $0 \leq r < \rho$.

Segue che $u(z) \equiv u(z_0)$ su $D(z_0, r)$

Sia ora Ω' il più grande aperto contenuto in Ω su cui $u(z) \equiv u(z_0)$. Dimostriamo che è chiuso in Ω.

infatti se $z_n \in \Omega'$ e $z_n \longrightarrow z_\infty \in \Omega$ prendo un disco $D(z_\infty, \delta) \subseteq \Omega$ e su tale disco prendo un'armonica coniugata v di u. Su Ω' invece $u(z) \equiv u(z_0)$ è già olomorfa. Quindi su $\Omega' \cap D(z_\infty, \delta)$ $(\neq \emptyset)$

$$u(z) + iv(z) \equiv u(z_0) + i\alpha \quad , \alpha \in \mathbb{R}.$$

Segue che $u(z)+iv(z) \equiv u(z_0)+i\alpha$ su $D(z_\infty,\delta)$
e quindi $u(z) \equiv u(z_0)$ $\forall z \in D(z_\infty,\delta)$, $\Rightarrow z_\infty \in \Omega'$.

Quindi Ω' è aperto e chiuso in Ω, e $\Omega' \neq \emptyset$.

Quindi $\Omega' = \Omega$ perché Ω è connesso. $\boxtimes$

OSSERVAZIONE

Se $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ è limitato, e $u \in C(\bar{\Omega})$
è armonica in Ω, allora si ha

$$\max_{z \in \bar{\Omega}} u(z) = \max_{z \in \partial\Omega} u(z).$$

OSSERVAZIONE

Abbiamo visto che se Ω è semplicemente connesso, allora ogni funzione reale armonica ammette un'armonica coniugata.
Vale anche il viceversa: se in Ω ogni funzione armonica ammette un'armonica coniugata, allora Ω è semplicemente connesso.
Infatti sia γ un cammino chiuso in Ω e sia $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Dimostreremo che allora $\operatorname{Ind}_\gamma(\alpha) = 0$.

Si fa così: sia $u(z) := \log|z-\alpha|$.
u è armonica. Allora ammette una coniugata v t.c. $u+iv \in H(\Omega)$.

Poniamo $f = u + iv$, $h = (z-\alpha)e^{-f}$.

Allora

$$|h(z)| = |z-\alpha|\,|e^{-u-iv}| = |z-\alpha|\,|e^{-u}|$$

$$= |z-\alpha|\, e^{-\log|z-\alpha|} = 1$$

Per il teorema delle mappe aperte, deve essere $h(z) \equiv \text{cost.}$

Quindi $0 = h' = e^{-f} + (z-\alpha)(-f')e^{-f}$

da cui $f' = (z-\alpha)^{-1}$ in Ω

e quindi $\mathrm{Ind}_\gamma(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\zeta-\alpha}\, d\zeta =$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f'(\zeta)\, d\zeta = 0. \qquad \boxtimes$$

Abbiamo così un'ulteriore caratterizzazione degli aperti semplicemente connessi:

Ω semplicemente connesso $\iff$ $\mathbb{C}^* \setminus \Omega$ connesso
$\iff$ ogni ciclo in Ω è omologo a 0 $\iff$
ogni cammino chiuso è contraibile $\iff$
ogni funzione olomorfa ammette primitiva
$\iff$ ogni funzione armonica ammette una armonica coniugata