I NUMERI RAZIONALI $\mathbb{Q}$

Siano assegnati due numeri interi m ed n. Vogliamo risolvere l'equazione
$s \cdot m = n$. (E)
L'algoritmo della divisione ci dice che se $|m| \leq |n|$, allora esistono $s, r \in \mathbb{Z}$ tali che

1) $n = s \cdot m + r$
2) $|r| < |m|$

s ed r sono univocamente determinati.
L'equazione (E) è risolvibile solo se $r = 0$. Ad esempio, se $n = 10$, $m = 6$, si ha

$$10 = 6 \cdot \underbrace{1}_{s} + \underbrace{4}_{r}$$

e quindi $s \cdot 6 = 10$ non è risolvibile.

Nasce l'esigenza di estendere $\mathbb{Z}$.

Si costruisce dapprima l'insieme delle frazioni

$$\mathcal{Y} = \left\{ \frac{n}{m} \;\middle|\; n, m \in \mathbb{Z},\ m \neq 0 \right\}$$

tecnicamente
$$\mathcal{Y} = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) = \{(n, m) \mid n, m \in \mathbb{Z},\ m \neq 0\}$$

In $\mathcal{Y}$ definiamo una relazione di equivalenza

$$\frac{n}{m} \equiv \frac{n'}{m'} \iff nm' - n'm = 0 .$$

I numeri razionali sono

$$\mathbb{Q} := \mathbb{Z}/\equiv$$

Le operazioni sono così definite:

$$\left[\frac{n_1}{m_1}\right] + \left[\frac{n_2}{m_2}\right] := \left[\frac{n_1 m_2 + n_2 m_1}{m_1 \cdot m_2}\right]$$

$$\left[\frac{n_1}{m_1}\right] \cdot \left[\frac{n_2}{m_2}\right] := \left[\frac{n_1 \cdot n_2}{m_1 \cdot m_2}\right]$$

L'ordinamento si definisce così:
Date $\left[\frac{n_1}{m_1}\right]$ e $\left[\frac{n_2}{m_2}\right]$, con $m_1 > 0$, $m_2 > 0$,

diciamo che $\left[\frac{n_1}{m_1}\right] \leq \left[\frac{n_2}{m_2}\right] \iff$

$$n_1 m_2 \leq n_2 m_1 .$$

Con queste definizioni, abbiamo che vale:

- .) $p + q = q + p \quad \forall\, p, q \in \mathbb{Q}$
- .) $p + (q + t) = (p + q) + t \quad \forall\, p, q, t \in \mathbb{Q}$
- .) $p + \left[\frac{0}{1}\right] = p \quad \forall\, p \in \mathbb{Q}$ ($\left[\frac{0}{1}\right]$ elemento neutro per $+$)
- .) $\forall\, p = \left[\frac{n}{m}\right]$, $-p = \left[\frac{-n}{m}\right]$ soddisfa

  $p + (-p) = 0$ (esistenza dell'opposto)

.) $p \cdot q = q \cdot p \quad \forall\, p, q \in \mathbb{Q}$

.) $(p \cdot q) \cdot t = p \cdot (q \cdot t) \quad \forall\, p, q, t \in \mathbb{Q}$

.) $p \cdot \left[\frac{1}{1}\right] = p \quad \forall\, p \in \mathbb{Q}$ ($\left[\frac{1}{1}\right]$ elemento neutro per $\mathbb{Q}$)

.) $\forall\, p = \left[\frac{n}{m}\right] \neq 0$, $p^{-1} := \left[\frac{m}{n}\right]$ soddisfa

$p \cdot p^{-1} = 1$. (esistenza dell'inverso.

.) $p \cdot q = 0 \iff p = 0 \lor q = 0$

.) $p \cdot (q + t) = p \cdot q + p \cdot t \quad \forall\, p, q, t \in \mathbb{Q}$.

L'ordinamento è compatibile con l'algebra

.) $p \leq q \implies p + t \leq q + t \quad \forall\, p, q, t \in \mathbb{Q}$

.) $(p \leq q) \land (t \geq 0) \implies p \cdot t \leq q \cdot t$

Osserviamo che $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ nel senso che $\mathbb{Z}$ si può identificare con il sottoinsieme di $\mathbb{Q}$ dato da

$$\left\{ \left[\frac{n}{1}\right] \;\middle|\; n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Se ora vogliamo risolvere

$s \cdot m = n$, $\quad m, n \in \mathbb{Z}$, in $\mathbb{Q}$

la soluzione è $s = \left[\frac{n}{m}\right]$.

più in generale, se $p, q \in \mathbb{Q}$ e voglio risolvere $s \cdot p = q$, se $p \neq 0$ si ha che la soluzione è $s = q \cdot p^{-1}$.

Una proprietà importante di $\mathbb{Q}$ è la proprietà di Archimede.

PROPRIETÀ DI ARCHIMEDE.

Siano $p, q \in \mathbb{Q}$, $0 < p < q$.

Allora $\exists\, n \in \mathbb{N}$ t.c. $np > q$.

Infatti, se $p = \left[\frac{n_1}{m_1}\right]$ $q = \left[\frac{n_2}{m_2}\right]$

con $n_1, m_1, n_2, m_2 > 0$, posso passare al denominatore comune

$$p = \left[\frac{n_1 m_2}{m_1 m_2}\right] \qquad q = \left[\frac{n_2 m_1}{m_1 m_2}\right]$$

basta prendere $n := n_2 m_1 + 1$ si ha

$$n \cdot p = \left[\frac{n_2 m_1 + 1}{1}\right] \cdot \left[\frac{n_1 m_2}{m_1 m_2}\right] = \left[\frac{n_1 m_2 (n_2 m_1 + 1)}{m_1 m_2}\right]$$

$$\geq \left[\frac{n_2 m_1 + 1}{m_1 m_2}\right] > \left[\frac{n_2 m_1}{m_1 m_2}\right] = \left[\frac{n_2}{m_2}\right] = q$$

Da questa proprietà segue che esistono razionali arbitrariamente grandi e arbitrariamente piccoli.

Ci sono problemi che non si possono risolvere nemmeno in $\mathbb{Q}$. Ad esempio

$$q^2 = 2$$

(è un problema geometrico semplice: si tratta di trovare la diagonale di un quadrato di lato 1).

Infatti se $\exists$ una frazione $\frac{n}{m}$ t.c. $\left(\frac{n}{m}\right)^2 = 2$, si avrebbe $n^2 = 2m^2$.

Ma a sinistra il fattore 2 compare un numero pari di volte, mentre a destra un numero dispari di volte, il che è assurdo. Quindi non esiste nessun razionale q t.c. $q^2 = 2$.

Questa "lacuna" di $\mathbb{Q}$ è un caso particolare di una "lacuna" più generale che ora andremo a descrivere.

<u>Definizione</u>

Sia $E \subseteq \mathbb{Q}$. E si dice superiormente limitato $\iff \exists\ M \in \mathbb{Q}$ t.c.

$\forall\ p \in E$ risulta $p \leq M$.

Se E è superiormente limitato, allora

Ogni M che soddisfa le proprietà appena enunciate si dice "limitazione superiore per E".

In altre parole:

M si dice limitazione superiore per E
$\iff$ $\forall p \in E$ risulta $p \leq M$.

E si dice superiormente limitato $\iff$ l'insieme delle sue limitazioni superiori è non vuoto.

Ad esempio $\mathbb{N}$ non è superiormente limitato in $\mathbb{Q}$. Invece $\{\dots, -3, -2, -1, 0\}$ è superiormente limitato in $\mathbb{Q}$.

Analogamente si definisce il concetto di limitazione inferiore e di insieme inferiormente limitato.

Definizione

Sia $E \subseteq \mathbb{Q}$ superiormente limitato e non vuoto.

Sia $\mathfrak{M} := \{ M \in \mathbb{Q}$ t.c. M è una limitaz. superiore di $\mathbb{Q} \}$.

Sappiamo che $\mathfrak{M}$ è non vuoto.

Supponiamo che esista $s \in M$ che sia "il più piccolo elemento di M", ovvero $s \in M$ tale che non esistono altri elementi di M che siano strettamente minori di s.
In tal caso si dice che s è l'estremo superiore di E e si scrive
$$s = \sup E.$$

Ricapitolando: sia $s \in \mathbb{Q}$. Si dice che s è l'estremo superiore di $E \iff$

1) $(\forall x \in E)(x \leq s)$

2) $(\forall s' < s)(\exists x \in E)(x > s')$

La proprietà 1 dice che s è una limitazione superiore di E; la proprietà 2) dice che non esistono limitazioni superiori di E che siano più piccole di s.

<u>Oss.</u> Non possono esistere due estremi superiori distinti dello stesso insieme E.

In modo analogo si definisce il concetto di estremo inferiore di un insieme non vuoto e inferiormente limitato.

Ad esempio se $E = \{p \in \mathbb{Q} \mid p < 2\}$
$\sup E = 2$
e se $E' = \{p \in \mathbb{Q} \mid p \leq 2\}$
ancora $\sup E = 2$.

Mostreremo ora che in $\mathbb{Q}$ esistono insiemi superiormente limitati e non vuoti, che non ammettono estremo superiore. L'esempio che faremo è strettamente collegato alla non esistenza di $\sqrt{2}$ in $\mathbb{Q}$.

ESEMPIO DI INSIEME CHE NON AMMETTE ESTREMO SUPERIORE IN $\mathbb{Q}$

Sia $A := \{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0 \wedge q^2 < 2\}$

Si ha che $A \neq \emptyset$ perché $1 \in A$.
Inoltre A è superiormente limitato, perché se $p \geq 2$, allora $p^2 \geq 4$ e quindi $p \notin A$. Quindi 2 è una limitazione superiore di A.

Supponiamo che $\exists\ q^* = \sup A$, $q^* \in \mathbb{Q}$

Ci sono tre possibilità:

- $\cdot)$ ${q^*}^2 = 2$ abbiamo visto che non è possibile
- $\cdot)$ ${q^*}^2 < 2$
- $\cdot)$ ${q^*}^2 > 2$.

Ora:

·) Supponiamo che $q^{*2} < 2$.
Prendiamo $n \in \mathbb{N}$ t.c. $n > \frac{2q^* + 1}{2 - q^{*2}}$

e definiamo $q' := q^* + \frac{1}{n} > q^*$

Si ha che

$$\left(q^* + \frac{1}{n}\right)^2 = q^{*2} + \frac{1}{n^2} + \frac{2q^*}{n}$$

$$< q^{*2} + \frac{2q^*+1}{n} < 2$$

$\boxed{\text{per la scelta di } n}$

Quindi $q' \in A$.

Quindi esistono elementi di A strettamente maggiori di q^*. Quindi q^* non è una limitazione superiore per A, e quindi non può essere $\sup A$.

·) Supponiamo invece che $q^{*2} > 2$.

prendiamo $n \in \mathbb{N}$, $n > \frac{2q^*+1}{q^{*2} - 2}$.

Si ha che

$$q' := \left(q^* - \frac{1}{n}\right) < q^* \quad \text{e}$$

$$q'^2 = \left(q^* - \frac{1}{n}\right)^2 = q^{*2} + \frac{1}{n^2} - \frac{2q^*}{n} > q^{*2} - \frac{2q^*+1}{n} > 2$$

$\boxed{\text{per la scelta di } n}$

Quindi ho trovato un elemento strettamente minore di q^* che non sta in A. Cioè ho

$$0 < q' < q^* \quad , \quad q' \notin A .$$

Allora se $q' < q \leq q^*$ si ha

$$q^2 > 2 \quad \text{e quindi} \quad q \notin A .$$

Quindi q' è una limitazione superiore di A, con $q' < q^*$.

Quindi q^* non può essere sup A.

Segue che A non ammette estremo superiore.

Nasce l'esigenza di estendere $\mathbb{Q}$ in modo che tutti gli insiemi superiormente limitati ammettano estremo superiore.

N.B. Se riusciamo a estendere $\mathbb{Q}$ ad un insieme $\mathbb{R}$ in cui ogni insieme superiormente limitato e non vuoto ammette estremo superiore, l'esempio qui sopra ci dice che

$\sup A = \sqrt{2}$.