ASSIOMI DEI NUMERI REALI

Assumiamo d'ora in avanti che esista un'estensione di $\mathbb{Q}$ in cui sia garantita l'esistenza del sup per ogni insieme superiormente limitato non vuoto. Chiameremo tale estensione "campo dei numeri reali", $\mathbb{R}$. Dopo aver elencato gli assiomi di $\mathbb{R}$ e averli commentati, vedremo in breve un accenno a come si costruisce $\mathbb{R}$ a partire da $\mathbb{Q}$.

Assiomi di $\mathbb{R}$

In $\mathbb{R}$ ci sono due operazioni, $+$ e $\cdot$, tali che:

1) $x+y=y+x \quad \forall\, x,y\in\mathbb{R}$
2) $x+(y+z)=(x+y)+z \quad \forall\, x,y,z\in\mathbb{R}$
3) $\exists!\, 0\in\mathbb{R}$ t.c. $x+0=0+x=x \quad \forall\, x\in\mathbb{R}$
4) $\forall\, x\in\mathbb{R}\ \exists!\, -x\in\mathbb{R}$ t.c. $x+(-x)=0$
5) $x\cdot y=y\cdot x \quad \forall\, x,y\in\mathbb{R}$
6) $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z \quad \forall\, x,y,z\in\mathbb{R}$
7) $\exists!\, 1\in\mathbb{R}$ t.c. $x\cdot 1=1\cdot x=x \quad \forall\, x\in\mathbb{R}$
8) $\forall\, x\neq 0,\ \exists!\, x^{-1}\in\mathbb{R}$ t.c. $x\cdot x^{-1}=1$
9) $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z \quad \forall\, x,y,z\in\mathbb{R}$.

In $\mathbb{R}$ c'è un ordinamento totale $\leq$ compatibile con l'algebra, ovvero:

(i) $x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$

(ii) $x \leq y \wedge z \geq 0 \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$

(iii) $0 < 1$

Osserviamo che da $0<1$ segue $1 < 1+1 =: 2$
da $1<2$ segue $1+1 < 2+1 =: 3$, cioè
$2<3$, ecc.

In questo modo si costruisce in $\mathbb{R}$ una copia di $\mathbb{N}$. $n \longmapsto \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ volte}}$

A partire da $\mathbb{N}$ si costruisce in $\mathbb{R}$ una copia di $\mathbb{Z}$ e infine una copia di $\mathbb{Q}$.

L'ultimo assioma è quello che differenzia $\mathbb{Q}$ da $\mathbb{R}$:

$\star$) Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ $E \neq \emptyset$, E limitato superiormente. Allora $\exists\, s = \sup E$, cioè $\exists\, s \in \mathbb{R}$ t.c.:

a) $(\forall x \in E)(x \leq s)$

b) $(\forall s' < s)(\exists\, x \in E)(x > s')$.

Vediamo ora che, sulla base degli assiomi di $\mathbb{R}$, si ha che in $\mathbb{R}$ vale la proprietà di Archimede.

PROPRIETÀ DI ARCHIMEDE

Sia $0 < x < y$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.

Allora $\exists\, n \in \mathbb{N}$ t.c. $nx > y$.

Dimostrazione

Sia $A := \{ nx \mid n \in \mathbb{N} \}$

Se fosse $nx \leq y$ $\forall n$, allora A sarebbe superiormente limitato.

Sia allora $s := \sup A \in \mathbb{R}$

Deve essere $s \leq y$.

Ci sono due casi:

.) Se $s \in A$, allora $\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c. $s = \bar{n} x$. Anche $(\bar{n}+1) x \in A$, ma $(\bar{n}+1)x > \bar{n}x = s$, assurdo.

.) Se $s \notin A$, considero $s - \frac{x}{2} < s$. Allora $\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c. $\bar{n} x > s - \frac{x}{2}$ e quindi

$$\underbrace{(\bar{n}+1)x}_{\in A} > s - \frac{x}{2} + x = s + \frac{x}{2} > s,$$

assurdo.

Quindi deve esistere $n \in \mathbb{N}$ t.c. $nx > y$. $\square$

Conseguenze

1) Se $0 < \varepsilon$, allora $\exists\, n \in \mathbb{N}$ t.c. $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

2) Se $x < y$, $\exists\, q \in \mathbb{Q}$ t.c. $x < q < y$.

Infatti, sia $\varepsilon = y - x$ e sia $n \in \mathbb{N}$ t.c. $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Allora $\exists\, m \in \mathbb{N}$ t.c. $m \cdot \frac{1}{n} > x$

Sia $\bar{m}$ il più piccolo degli $m \in \mathbb{N}$ t.c. $m \cdot \frac{1}{\bar{n}} > x$. Allora $\frac{\bar{m}}{\bar{n}} > x$

e inoltre $\frac{\bar{m}}{\bar{n}} < y$, perché se fosse $\frac{\bar{m}}{\bar{n}} \geq y$, allora $\frac{\bar{m}-1}{\bar{n}} = \frac{\bar{m}}{\bar{n}} - \frac{1}{\bar{n}}$

$$\geq y - \frac{1}{n} > y - (y-x) = x$$

il che contraddice la minimalità di $\bar{m}$.

(densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$). $\boxtimes$

Valore assoluto

Sia $x \in \mathbb{R}$. Si definisce:

$$|x| := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Così $|x| \geq 0 \quad \forall\, x$.

Si ha che

$$|x+y| \leq |x| + |y| \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$$

(disuguaglianza triangolare)

Infatti:

·) Se $x \geq 0$, $y \geq 0$,

$|x+y| = x+y = |x| + |y|$

·) Se $x \leq 0$, $y \leq 0$

$|x+y| = -(x+y) = (-x) + (-y) = |x| + |y|$

·) Se $x > 0$ e $y < 0$

$$|x+y| = \begin{cases} |y| - x \leq |y| + |x| & \text{se } |y| > x \\ x - |y| \leq |x| + |y| & \text{se } |y| < x \end{cases}$$

Intervalli (notazioni)

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$

$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$

$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$

$]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

$]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$