FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE

In questa sezione tratteremo funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

Spesso di una funzione viene assegnata solo la "legge", e allora la prima cosa da fare è "determinarne il dominio", ovvero determinare il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}$ su cui la "legge" ha senso e definisce una funzione.

ESEMPIO

$f(x) = \frac{1}{x}$ ha come dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Definizioni

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo.

$f : I \to \mathbb{R}$ si dice non decrescente $\iff (\forall x_1, x_2 \in I)\,(x_1 < x_2 \to f(x_1) \leq f(x_2))$

$f : I \to \mathbb{R}$ si dice (strettamente) crescente $\iff (\forall x_1, x_2 \in I)\,(x_1 < x_2 \to f(x_1) < f(x_2))$

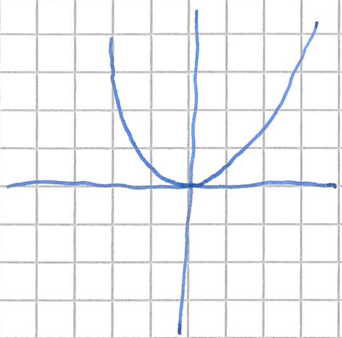
Analogamente si definisce una funzione non crescente e una funzione (strettamente) decrescente su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$.

Definizioni

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme simmetrico rispetto a 0. $f : A \to \mathbb{R}$ si dice:

(i) <u>pari</u> $\Longleftrightarrow (\forall x \in A)\,(f(x) = f(-x))$

(ii) <u>dispari</u> $\Longleftrightarrow (\forall x \in A)\,(f(x) = -f(-x))$



$f(x) = x^2$ è pari

$f(x) = x^3$ è dispari.

Definizione

Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. f si dice periodica $\Longleftrightarrow \exists\, T > 0$ t.c. $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f(x+T)$$

Il periodo di f è il più piccolo T per cui vale tale proprietà.

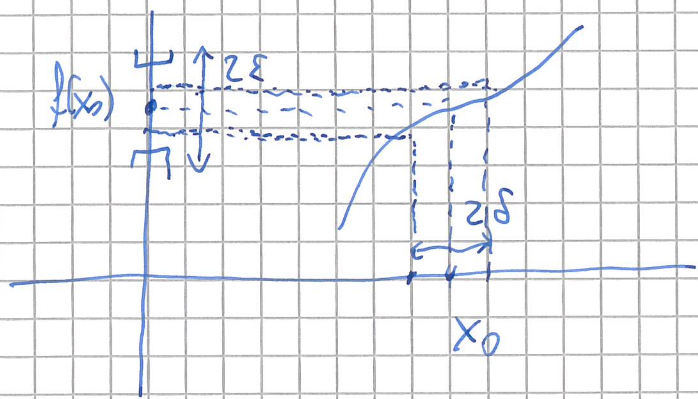
<u>ESEMPI</u> $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$ sono periodiche.

FUNZIONI CONTINUE

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, sia $f: I \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in I$.

Si dice che f è continua in x_0 $\iff$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(x \in I \land |x - x_0| < \delta \to |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$



significa che, fissato un margine di errore ε in output, posso determinare un margine di errore δ in input, mantenendomi all'interno del quale viene rispettato il margine di errore in output. E questo devo poterlo fare per qualunque ε.

La funzione f si dice continua in I $\iff$ f è continua in ogni $x_0 \in I$.

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ continua in $x_0 \in I$

Se $f(x_0)>0$ allora $\exists\, \rho>0$ t.c.
se $x\in I$ e $|x-x_0|<\rho$, allora $f(x)>0$.

Dim.

Sia $\varepsilon := \frac{f(x_0)}{2} > 0$.

Allora $\exists\, \delta>0$ t.c. se $|x-x_0|<\delta$ e $x\in I$,
$$|f(x)-f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2}$$

da cui

$$f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{f(x_0)}{2}$$

$\forall\, x$, con $|x-x_0|<\delta$.

Ponendo quindi $\rho := \delta$, per $|x-x_0|<\rho$ si ha

$$f(x) > f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2} > 0 \qquad \blacksquare$$

ESEMPI DI FUNZIONI CONTINUE

$f(x) = c \in \mathbb{R}$ è continua su $\mathbb{R}$

$f(x) = \alpha x$ $(\alpha\in\mathbb{R})$ è continua su $\mathbb{R}$.

Vedremo a breve di determinare classi ampie di funzioni continue.

CONTINUITÀ E OPERAZIONI

Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in I$.
Supponiamo che f, g siano continue in x_0.
Allora $f+g$, $f \cdot g$ e f/g sono continue in x_0 (l'ultimo asserto vale nel caso sia $g(x_0) \neq 0$).

Dim.

Sia $\varepsilon' > 0$. Allora $\exists\, \delta > 0$ t.c. se $|x - x_0| < \delta$, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon'$ e $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon'$. $(*)$

•) Consideriamo $f+g$. Sia $\varepsilon > 0$. Sia $\varepsilon' = \varepsilon/2$ e sia δ come sopra in $(*)$

Si ha allora, per $|x - x_0| < \delta$:

$$|(f(x) + g(x)) - (f(x_0) + g(x_0))| \leq$$

$$\leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| \leq$$

$$\leq \varepsilon' + \varepsilon' = 2\varepsilon'$$

•) Consideriamo $f \cdot g$. Sia $\varepsilon > 0$.

Sia $\varepsilon' = \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{1 + |f(x_0)| + |g(x_0)|}\right\}$

e sia δ come sopra in $(*)$

si ha allora, per $|x-x_0|<\delta$:

$$|f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)| \leq |f(x)g(x) - f(x_0)g(x)| + \\ + |g(x)f(x_0) - f(x_0)g(x_0)| \leq$$

$$\leq |g(x)|\,|f(x)-f(x_0)| + |f(x_0)|\,|g(x)-g(x_0)| \leq$$

$$\leq (|g(x)-g(x_0)| + |g(x_0)|)\,|f(x)-f(x_0)| + \\ + |f(x_0)|\,|g(x)-g(x_0)| \leq$$

$$\leq (\varepsilon' + |g(x_0)|)\,\varepsilon' + |f(x_0)|\,\varepsilon' \leq$$

$$\leq (1 + |g(x_0)| + |f(x_0)|)\,\varepsilon' = \varepsilon$$

.) Consideriamo f/g. È sufficiente trattare il caso $1/g$.
Sia $\varepsilon > 0$.
Sia $\varepsilon' = \min\left\{ \left|\frac{g(x_0)}{2}\right|, \frac{|g(x_0)|^2}{2}\varepsilon \right\}$

Sia δ come sopra in (*).

Per $|x-x_0|<\delta$ si ha allora

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}\right| = \frac{|g(x)-g(x_0)|}{|g(x)|\,|g(x_0)|} \leq$$

$$\leq \frac{|g(x)-g(x_0)|}{(|g(x_0)| - |g(x)-g(x_0)|)\,|g(x_0)|}$$

$$\leq \frac{|g(x)-g(x_0)|}{\frac{|g(x_0)|}{2}\cdot|g(x_0)|} \leq \frac{2\varepsilon'}{|g(x_0)|^2} = \varepsilon \quad \boxtimes$$

COMPOSIZIONE DI FUNZIONI CONTINUE.

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ continua in $x_0 \in I$

Sia $g: J \to \mathbb{R}$ continua in $y_0 = f(x_0) \in J$

Allora $g \circ f$ è continua in x_0.

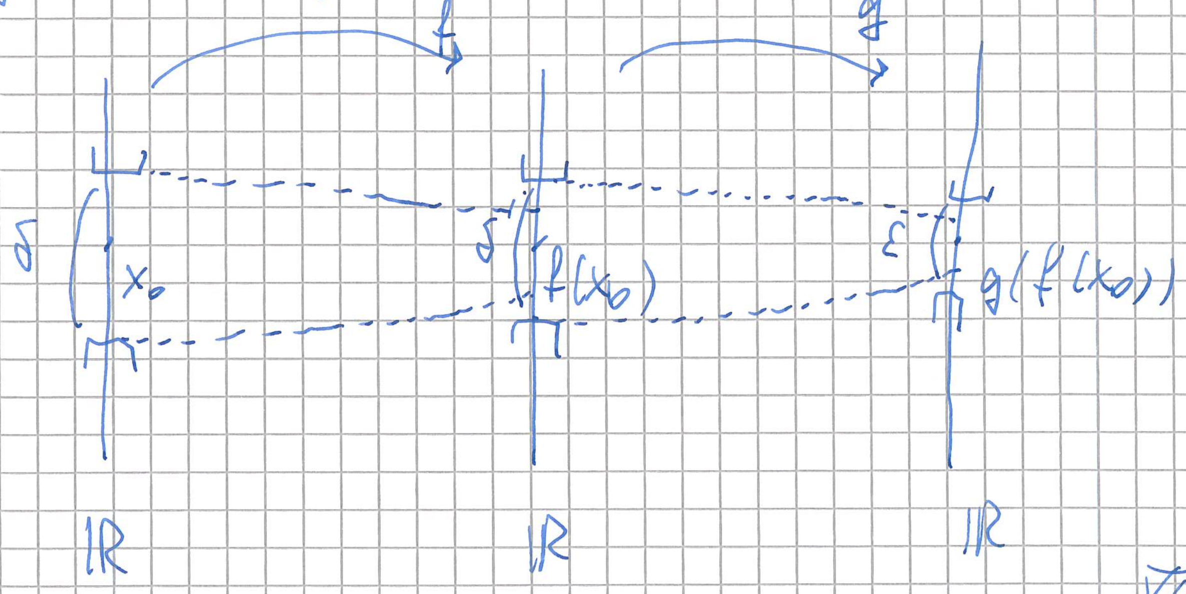
(stiamo supponendo che $f(I) \subseteq J$, cosicché $g \circ f$ è ben definita su I).

Dim.

Sia $\varepsilon > 0$. Allora $\exists\, \delta' > 0$ t.c. se $|y - y_0| < \delta'$, allora $|g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$.

$\exists\, \delta > 0$ t.c. se $|x - x_0| < \delta$, allora $|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - y_0| < \delta'$.

Allora per $|x - x_0| < \delta$ si ha $|g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$.



$\boxtimes$

Conseguenze:

Sappiamo che $f(x) \equiv c$ e $f(x) = x$ sono continue.
Segue che ogni funzione algebrica
$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, con $P(x)$ e $Q(x)$ polinomi, è continua in tutti i punti in cui il denominatore $Q(x)$ non si annulla.

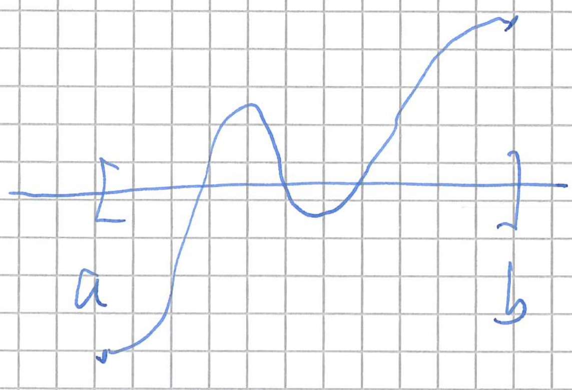
TEOREMA DEGLI ZERI

Ora vedremo come in $\mathbb{R}$ si possono estrarre le radici quadrate. Dimostreremo un risultato molto più generale.

TEOREMA degli zeri

Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua.
Supponiamo che $f(a) < 0$, $f(b) > 0$.
Allora $\exists$ $c \in]a, b[$ t.c. $f(c) = 0$.

Dim.



Sia $E := \{ x \in [a,b] \mid f(x) < 0 \}$.

$E \neq \emptyset$ perché $a \in E$.

Sia $x^* := \sup E$

Affermo che $f(x^*) = 0$. Lo dimostriamo per assurdo.

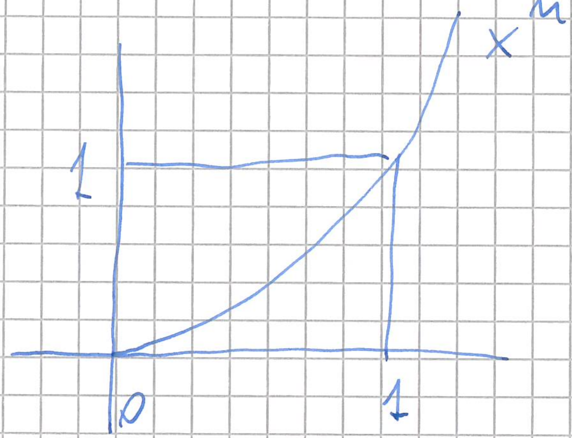
•) Se fosse $f(x^*) < 0$, allora innanzitutto deve essere $x^* < b$. In secondo luogo, per il teorema della permanenza del segno $\exists\ \delta > 0$ t.c. se $|x - x^*| < \delta$, allora $f(x) < 0$. Quindi esistono elementi di E strettamente maggiori di x^*, il che contraddice $\sup E = x^*$.

•) Se fosse $f(x^*) > 0$, allora innanzitutto deve essere $x^* > a$. In secondo luogo, per il teorema della permanenza del segno $\exists\ \delta > 0$ t.c. se $|x - x^*| < \delta$, allora $f(x) > 0$. Quindi tutti gli elementi di E sono $\leq x^* - \delta$, e quindi x^* non è la più piccola limitazione superiore di E, il che contraddice $\sup E = x^*$.

Di conseguenza: $f(x^*) = 0$. $\boxed{}$

RADICI n-esime

Consideriamo la funzione $f(x) = x^n$ su $[0, +\infty[$ con $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$.
Osserviamo che f è strettamente crescente, e quindi iniettiva, ed è continua.



Sia ora $\bar{y} \geq 0$. Vogliamo dimostrare che allora l'equazione $x^n = \bar{y}$ ammette un'unica soluzione in $[0, +\infty[$.

L'unicità è conseguenza dell'iniettività di f.

Per l'esistenza, si ha:

.) se $\bar{y} = 0$, la soluzione è $\bar{x} = 0$.

.) se $\bar{y} > 0$, consideriamo
$g(x) := f(x) - \bar{y}$.

g è continua. Si ha

$g(0) = -\bar{y} < 0$.

Inoltre, posto $\bar{w} := \max\{2, \bar{y}\}$

si ha:

-) se $\bar{y} \leq 1$, $f(\bar{w}) = 2^n > 1 \geq \bar{y}$

e quindi $g(\bar{w}) > 0$

·) se $\bar{y} > 1$, $f(\bar{w}) \geq \bar{y}^n > \bar{y}$

e quindi $g(\bar{w}) > 0$

Allora per il teorema degli zeri

$\exists!\ \bar{x} \in]0, \bar{w}[$ t.c. $f(\bar{x}) = \bar{x}^n = \bar{y}$.

<u>Def. (radice n-esima)</u>

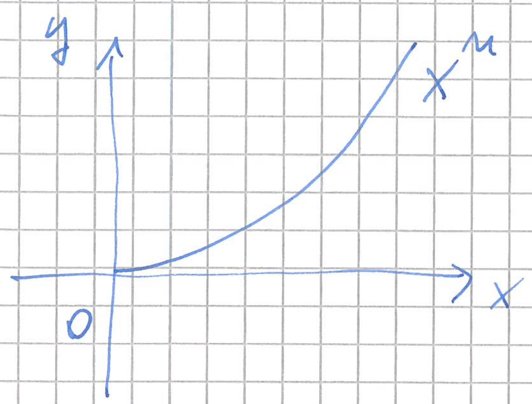
Tale soluz. $\bar{x}$ di $x^n = \bar{y}$ si dice "radice n-esima" di $\bar{y}$, e si scrive $\bar{x} = \bar{y}^{1/n}$. $(n \in \mathbb{N}, n \neq 0)(\bar{y} \geq 0)$

Si costruisce in questo modo una funzione

$h : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$

$h(y) = y^{1/n}$

h è strettamente crescente, quindi iniettiva.



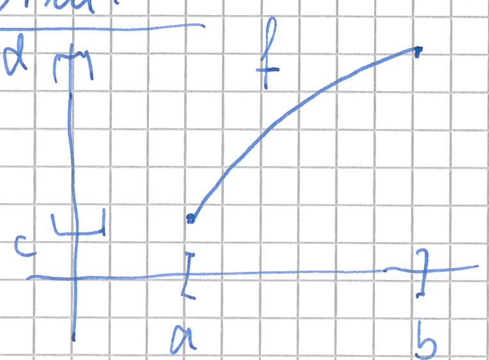
Per dimostrare che h è continua, applichiamo questo risultato generale:

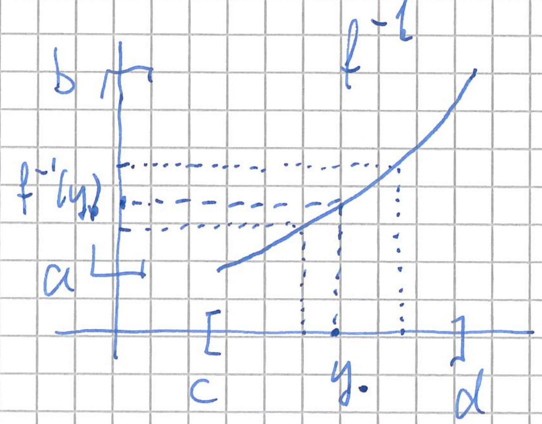
PROPOSIZIONE

Se $f: [a,b] \longrightarrow [c,d]$ continua e strettamente crescente, con $f(a) = c$, $f(b) = d$.
Per il teorema degli zeri sappiamo che $f([a,b]) = [c,d]$ e che f è invertibile con $f^{-1}: [c,d] \to [a,b]$ strettamente crescente.

Tesi: f^{-1} è continua.

Dim.





Sia $y_0 \in [c,d]$ e sia $\varepsilon > 0$.

Sia $x_0 := f^{-1}(y_0)$

Sia $x_1 = x_0 - \varepsilon$, $x_2 = x_0 + \varepsilon$.

Sia $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$.

Si ha $y_1 < x_0 < y_2$ (f strett. crescente).

Se $y \in]y_1, y_2[$ risulta

$$f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2)$$

poiché f^{-1} è strettamente crescente.

e quindi $x_0 - \varepsilon < f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon$,

cioè
$$f^{-1}(y_0) - \varepsilon < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0) + \varepsilon$$

cioè $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$ se

$y \in]y_1, y_2[$, con $y_0 \in]y_1, y_2[$.

Quindi f^{-1} è continua. $\boxtimes$

<u>OSSERVAZIONE</u>

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora f è iniettiva $\Longleftrightarrow$ f è strettamente crescente o strettamente decrescente.

Dim.

Se f è strettamente crescente o strettamente decrescente allora è iniettiva (ovvio).

Viceversa.
Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ iniettiva, con $f(a) < f(b)$. Mostriamo che allora è strettamente crescente.

Osserviamo per prima cosa che
$\forall\, p \in\,]a,b[$ si ha $f(a) < f(p) < f(b)$
perché altrimenti

applicando il teorema degli zeri contraddiciamo l'iniettività.

A questo punto, se $a < x_1 < x_2 < b$

si ha
$$f(a) < f(x_1) < f(b)$$

e quindi $f(x_1) < f(x_2) < f(b)$.

∎