ESTENSIONI DEL CONCETTO DI POTENZA

•) Per $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, si definisce

$$x^n := \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ volte}}.$$

In modo più formale, per induzione:

$$\begin{cases} x^0 := 1 \\ x^{n+1} := x \cdot x^n, & n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Proprietà:

(i) $x^0 = 1$

(ii) $x^{n+m} = x^n \cdot x^m \qquad n, m \in \mathbb{N}$

(iii) $(x^n)^m = x^{n \cdot m} \qquad n, m \in \mathbb{N}$

•) Per $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$, definiamo

$$x^{-n} := (x^{-1})^n$$

In questo modo definiamo x^n, $n \in \mathbb{Z}$.

Proprietà:

(i) $x^0 = 1$

(ii) $x^{n+m} = x^n \cdot x^m \qquad n, m \in \mathbb{Z}$

(iii) $(x^n)^m = x^{n \cdot m} \qquad n, m \in \mathbb{Z}$.

•) Sia ora $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$. Sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Abbiamo definito $x^{1/n}$ come

l'unica soluzione positiva di $y^n = x$.

Definiamo allora per $x > 0$

$$x^{\frac{m}{n}} := \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m , \quad \text{con } \underset{n \neq 0}{n \in \mathbb{N}}, \; m \in \mathbb{Z}$$

Si ha:

$$x^{\frac{n}{m} + \frac{n'}{m'}} = x^{\frac{nm' + n'm}{mm'}} = \left(x^{\frac{1}{mm'}}\right)^{nm' + n'm}$$

$$= \left(x^{\frac{1}{mm'}}\right)^{nm'} \left(x^{\frac{1}{mm'}}\right)^{n'm}$$

$$= x^{\frac{nm'}{mm'}} \; x^{\frac{n'm}{mm'}} = x^{\frac{n}{m}} \; x^{\frac{n'}{m'}},$$

e analogamente

$$\left(x^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{n'}{m'}} = x^{\frac{n}{m} \cdot \frac{n'}{m'}}.$$

Ricapitolando, possiamo definire

x^q per $x > 0$, $x \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{Q}$

e valgono le proprietà:

(i) $x^0 = 1$

(ii) $x^{p+q} = x^p x^q \qquad p, q \in \mathbb{Q}$

(iii) $(x^p)^q = x^{p \cdot q} \qquad p, q \in \mathbb{Q}$.

Ora definiremo a^x con $a, x \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Bisognerà utilizzare una definizione "per approssimazione".

POTENZE CON ESPONENTE REALE

Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$.
Abbiamo definito a^q con $q \in \mathbb{Q}$.
Osserviamo che:
·) $a^q > 1$ se $q > 0$
·) $a^q < 1$ se $q < 0$

Se $p < q$, si ha $a^p < a^q$: infatti ciò equivale a $a^{p-q} < 1$.

L'idea ora è di definire, per $x \in \mathbb{R}$,
$a^x := \sup \{ a^q \mid q \in \mathbb{Q}, q \leq x \}$.
Osserviamo subito che se $x \in \mathbb{Q}$ riotteniamo a^x come definito precedentemente.

·) a^x è strettamente crescente.
Infatti, se $x < y$ prendiamo $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ t.c. $x < q_1 < q_2 < y$
Allora

$$
\begin{aligned}
a^x &= \sup \{ a^q \mid q \in \mathbb{Q}, q \leq x \} \\
&\leq \sup \{ a^q \mid q \in \mathbb{Q}, q \leq q_1 \} = a^{q_1} < \\
&< a^{q_2} \leq \sup \{ a^q \mid q \in \mathbb{Q}, q \leq y \} \\
&= a^y .
\end{aligned}
$$

Quindi $a^x < a^y$.

•) Si verifica che: $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

$a^{xy} = (a^x)^y$

•) Ora vogliamo mostrare a^x è continua.
Utilizzeremo la disuguaglianza di Bernoulli.
$(1+b)^m \geq 1 + mb$, $b \geq 0$, $m \in \mathbb{N}$

Fissiamo $x_0 \in \mathbb{R}$ ed $\varepsilon > 0$ piccolo.
Vogliamo trovare $n \in \mathbb{N}$ in modo che

$$a^{x_0} - \varepsilon \leq a^{x_0 - \frac{1}{n}} < a^{x_0} < a^{x_0 + \frac{1}{n}} \leq a^{x_0} + \varepsilon$$

Si ha:

$$a^{x_0 + \frac{1}{n}} \leq a^{x_0} + \varepsilon \iff a^{\frac{1}{n}} \leq 1 + \varepsilon a^{-x_0}$$

$$\iff a \leq (1 + \varepsilon a^{-x_0})^n .$$

Per Bernoulli si ha

$$(1 + \varepsilon a^{-x_0})^n \geq 1 + n \varepsilon a^{-x_0}$$

Per la proprietà di Archimede,
se n è abbastanza grande si ha

$$n \varepsilon a^{-x_0} \geq a .$$

Analogamente, si ha

$$a^{x_0 - \frac{1}{n}} \geq a^{x_0} - \varepsilon \iff a^{-\frac{1}{n}} \geq 1 - \varepsilon a^{-x_0}$$

$$\iff a^{1/n} \leq \frac{1}{1 - \varepsilon a^{-x_0}} = 1 + \frac{\varepsilon a^{-x_0}}{1 - \varepsilon a^{-x_0}}$$

$$\Longleftrightarrow \quad a \leq \left(1 + \frac{\varepsilon a^{-x_0}}{1-\varepsilon a^{-x_0}}\right)^n$$

e si conclude come prima applicando Bernoulli e Archimede. $\boxtimes$

Quindi $x \longmapsto a^x$ è strettamente crescente e continua, se $a>1$.

[<u>N.B.</u> per $0<a<1$, si definisce

$a^x := (a^{-1})^{-x}$.]

•) Sia sempre $a>1$. Allora $\forall M>0$ $\exists\ \bar{x} \in \mathbb{R}$ t.c. $a^{\bar{x}} \geq M$, e quindi $a^x \geq M \quad \forall\ x \geq \bar{x}$.

Infatti per $n \in \mathbb{N}$,

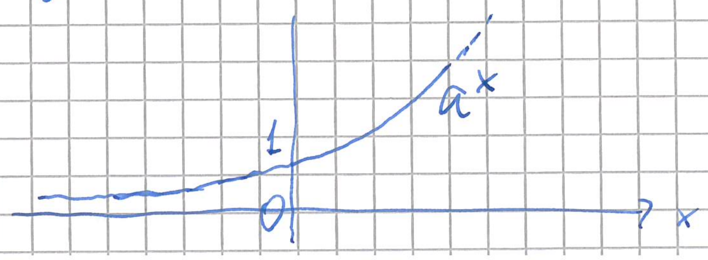
$a^n = (1+(a-1))^n \geq 1 + n(a-1)$

quindi se $n \geq \dfrac{M}{a-1}$, si ha

$a^n \geq M$.

•) Se $\delta>0$ $\exists\ \bar{x}$ t.c. $a^{\bar{x}} < \delta$

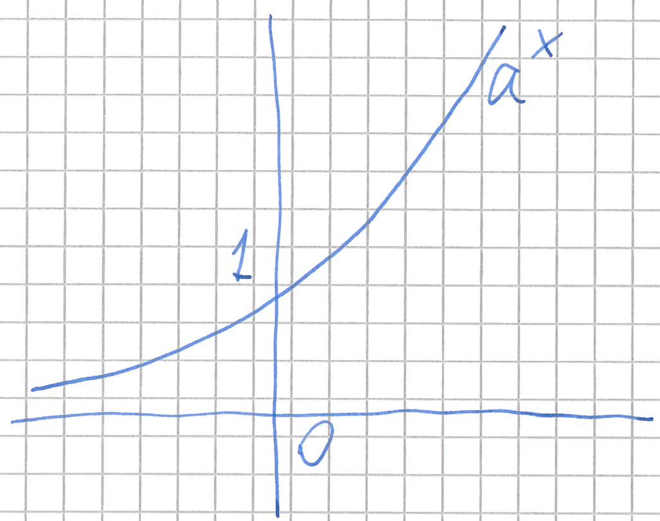
e quindi $a^x < \delta \quad \forall\ x \leq \bar{x}$.

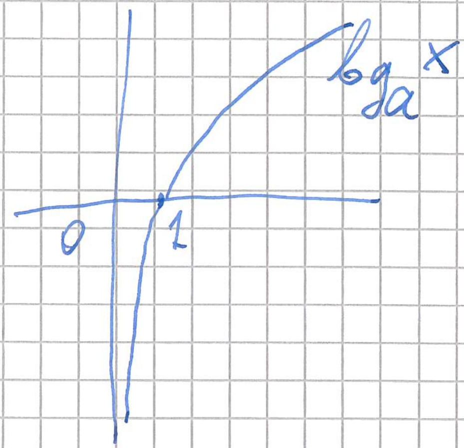


LOGARITMI

Se $a > 1$, la funzione $f(x) = a^x$ è invertibile, con inversa continua. La funzione inversa la chiamiamo "logaritmo in base a", $\log_a x :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$

Quindi $a^{\log_a x} = x$ $\log_a a^x = x$.





Proprietà del logaritmo

•) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$.

Infatti $a^{\log_a xy} = xy = a^{\log_a x} a^{\log_a y}$

$= a^{\log_a x + \log_a y}$

e dall'iniettività di a^z ottengo

$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$.

•) $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$.

•) $\log_a x^y = y \log_a x \quad \forall x > 0$
$\forall y \in \mathbb{R}$

Infatti $a^{\log_a x^y} = x^y = (a^{\log_a x})^y$
$= a^{y \log_a x}$

da cui per l'iniettività di a^z
$\log_a x^y = y \log_a x$.

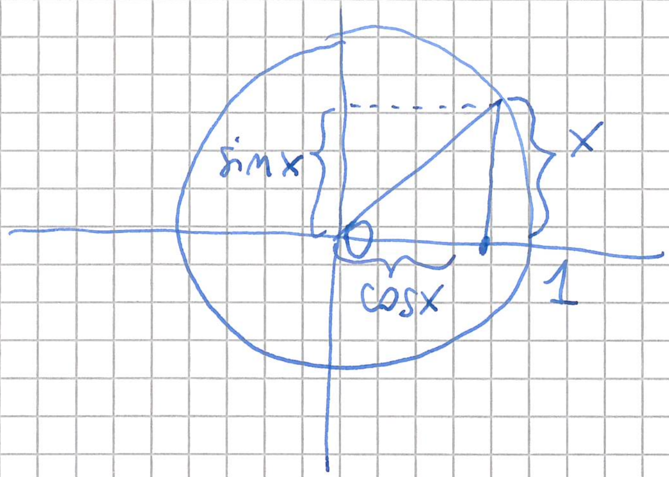
•) Cambio di base
$\log_b x = \log_b a \log_a x$

Infatti
$b^{\log_b x} = x = a^{\log_a x} = (b^{\log_b a})^{\log_a x}$
$= b^{\log_b a \log_a x}$

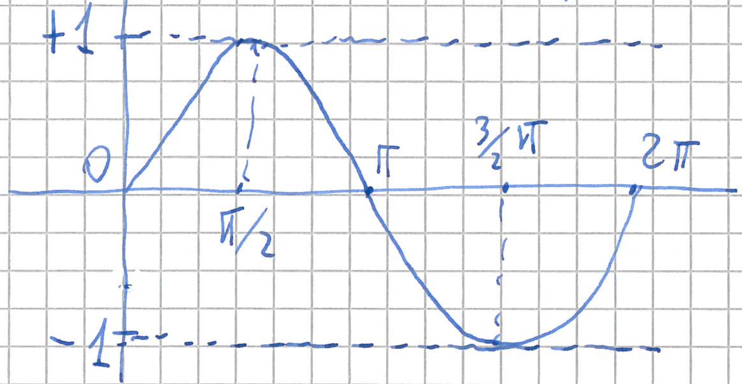
da cui per l'iniettività di b^z
segue $\log_b x = \log_b a \log_a x$.

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE (cenni)

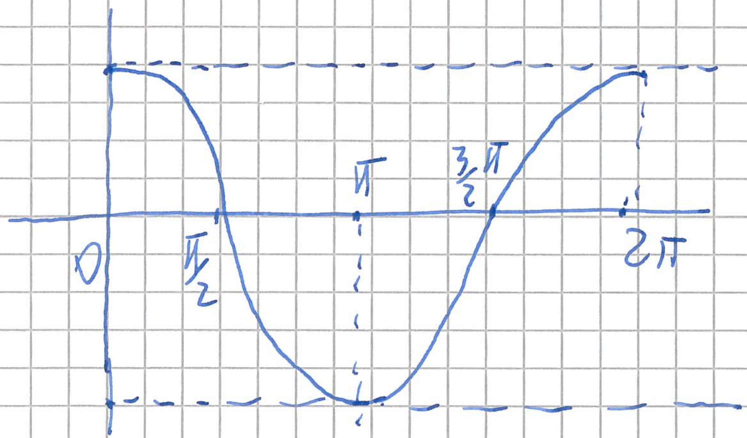
la variabile x misura l'angolo in radianti



$\sin x$ e $\cos x$ sono funzioni periodiche di periodo 2π



$\sin x$

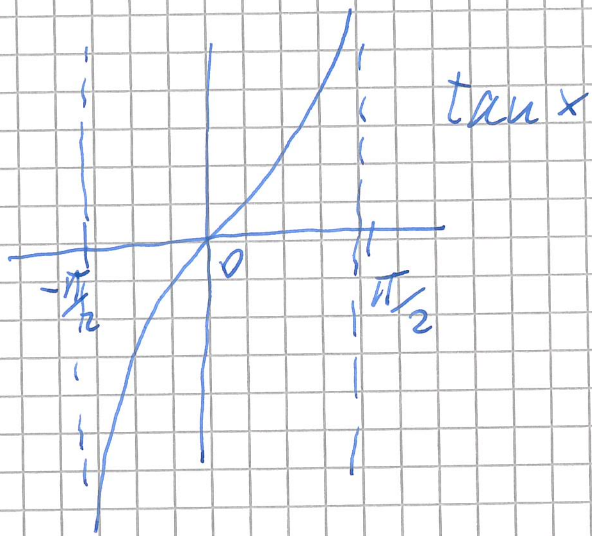


$\cos x$

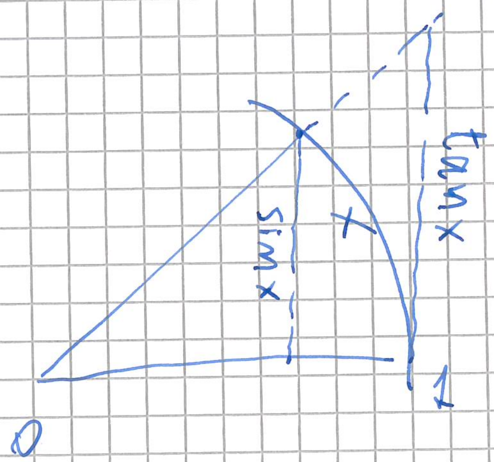
Valgono le formule di addizione

- $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
- $\sin(x+y) = \cos x \sin y + \cos y \sin x$

si definisce $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ $\quad x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$



si ha

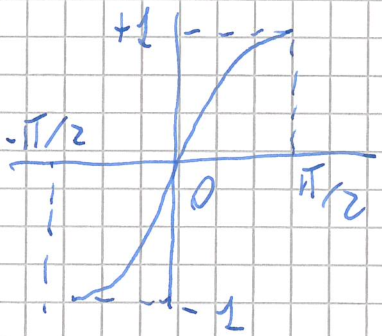


$\sin x < x < \tan x$

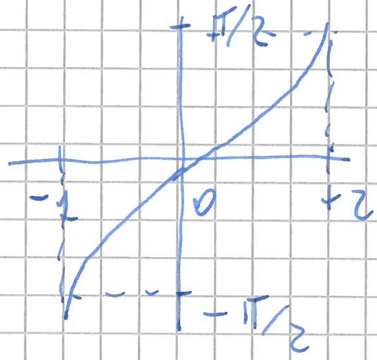
(dagli assiomi della geometria euclidea).

Da questa osservazione e dalle formule di addizione si dimostra che $\sin x$ e $\cos x$ sono funzioni continue.

•) La funzione $\sin x$ è strettamente crescente su $]-\pi/2, \pi/2[$ e quindi è invertibile su tale intervallo.
L'inversa si chiama arcoseno,
$\arcsin x : [-1, 1] \to [-\pi/2, +\pi/2]$

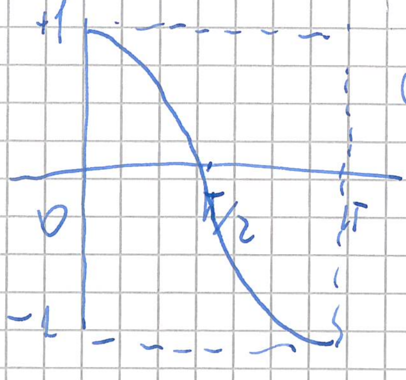


$\sin x$

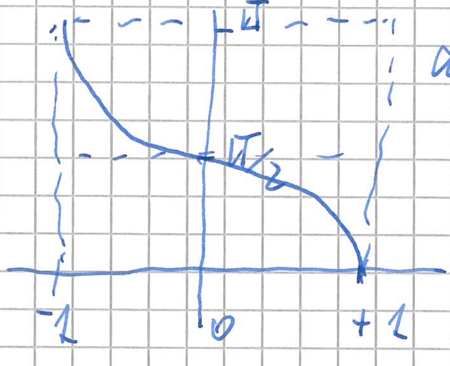


$\arcsin x$

•) La funzione $\cos x$ è strettamente decrescente su $[0, \pi]$ e quindi è invertibile su tale intervallo.
L'inversa si chiama arcocoseno,
$\arccos x : [-1, +1] \to [0, \pi]$

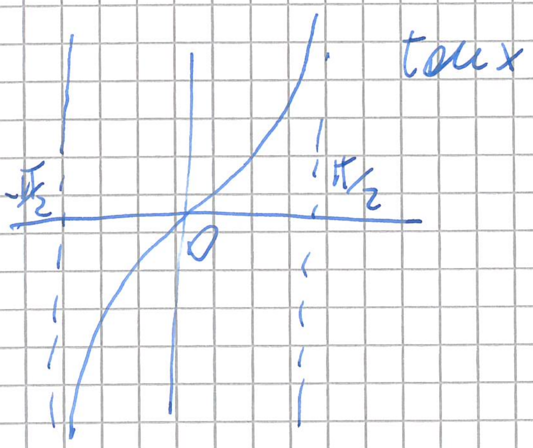


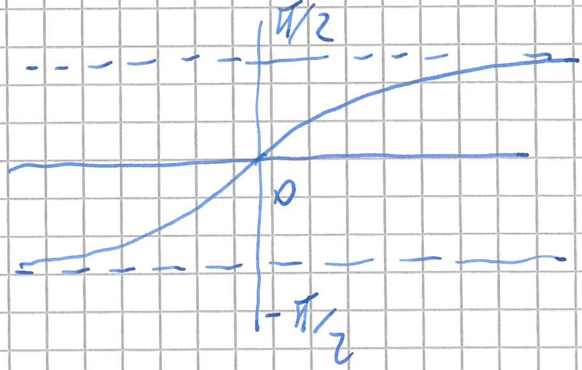
$\cos x$



$\arccos x$

•) Infine $\tan x$ è strettamente crescente su $]-\pi/2, \pi/2[$ e quindi è invertibile su tale intervallo. L'inversa si chiama arcotangente, $\arctan x : \mathbb{R} \longrightarrow \left] -\pi/2, \pi/2 \right[$





arctan x.

arcsin x, arccos x e arctan x sono funzioni continue in quanto inverse di funzioni continue.