LIMITI DI SUCCESSIONI

Def.

Si dice "successione di numeri reali" una funzione $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Notazione

Si scrive $a_n := \varphi(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Storicamente le successioni si indicano così:

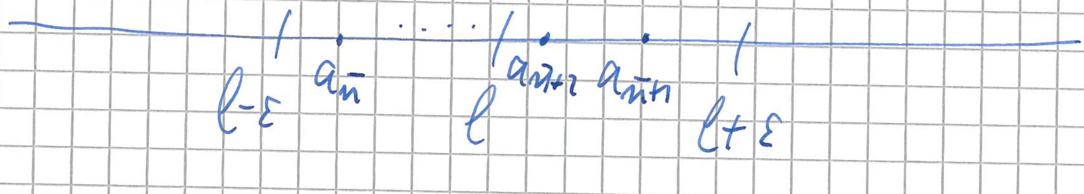
$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Definizione (successione convergente)

Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. Sia $l \in \mathbb{R}$. Si dice che $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a l (oppure: che il limite di a_n per $n \to \infty$ è l) $\Longleftrightarrow$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \bar{n} \in \mathbb{N})(\forall n \geq \bar{n})(|a_n - l| < \varepsilon)$$

Si scrive $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = l$

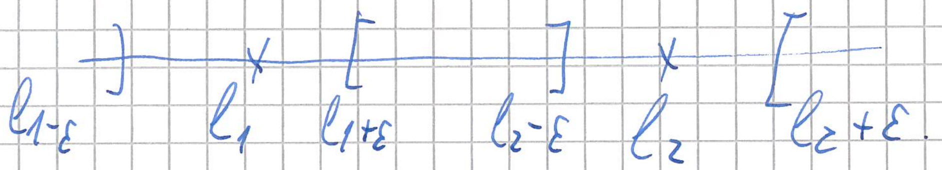


Fissato $\varepsilon > 0$, esiste un $\bar{n}$ tale che tutti gli a_n, da $\bar{n}$ in poi, distano da l meno di ε.

Detto in modo gretto, gli a_n si avvicinano a l sempre di più al crescere di n.

Oss.

Una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non può avere due limiti distinti l_1 ed l_2.



Infatti se scelgo $\varepsilon = \dfrac{l_2-l_1}{4}$,

allora $\exists\, \bar{n}_1 \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq \bar{n}_1$ si ha

$$|a_n - l_1| < \varepsilon = \frac{l_2-l_1}{4}$$

$\exists\, \bar{n}_2 \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq \bar{n}_2$ si ha

$$|a_n - l_2| < \varepsilon = \frac{l_2-l_1}{4}$$

Sia $\bar{n} := \max\{\bar{n}_1, \bar{n}_2\}$. Allora $\forall n \geq \bar{n}$ si ha

$$l_1 - \frac{l_2-l_1}{4} < a_n < l_1 + \frac{l_2-l_1}{4} <$$

$$< l_2 - \frac{l_2-l_1}{4} < a_n < l_2 + \frac{l_2-l_1}{4}$$

assurdo!

ESEMPI

Se $a_n = a$ $\forall n$, allora $\lim_{n \to \infty} a_n = a$

Se $a_n = \frac{1}{n}$ $\forall n$, allora $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

Def. (successione limitata)

Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali.

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si dice "limitata superiormente" $\iff$ $\exists$ $M \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha $a_n \leq M$.

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si dice "limitata inferiormente" $\iff$ $\exists$ $m \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha

$$m \leq a_n$$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si dice "limitata" $\iff$ è limitata sia inferiormente che inferiormente.

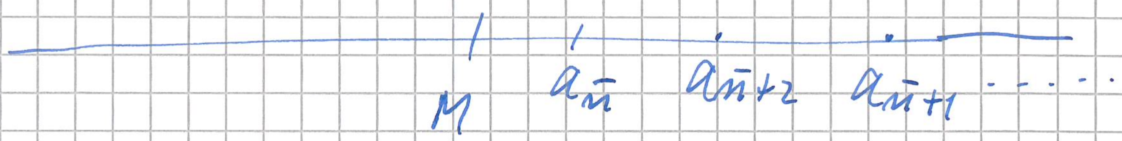
Def. (successione illimitata)

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si dice "illimitata" $\iff$ non è limitata. Si dice "illimitata superiormente" $\iff$ non è limitata superiormente. Si dice "illimitata inferiormente" $\iff$ non è limitata inferiormente.

Definizione (successione divergente)

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione. Si dice che a_n diverge a $+\infty$ (ovvero: il limite di a_n per n che tende all'infinito è $+\infty$)
$\iff (\forall M\in\mathbb{R})(\exists \bar{n}\in\mathbb{N})(\forall n\geq\bar{n})(a_n > M)$

Si scrive $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$



Definizione analoga per $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

Definizione (successione indeterminata)

Una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si dice "indeterminata" se non è né convergente né divergente

ESEMPI

$a_n = n$ è divergente a $+\infty$.

$a_n = (-1)^n$ è indeterminata.

SUCCESSIONI MONOTONE (crescenti e decrescenti)

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione.

Si dice che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è "non-decrescente"

$\Longleftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(a_{n+1} \geq a_n)$.

Si dice che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è "(strettamente) crescente" $\Longleftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(a_{n+1} > a_n)$.

Si dice che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è "non crescente" $\Longleftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(a_{n+1} \leq a_n)$

Si dice che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è (strettamente) decrescente $\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ (a_{n+1} < a_n)$.

Una successione che cade in uno dei casi elencati si dice monotona (o strettamente monotona).

TEOREMA

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione monotona. Allora o è convergente o è divergente.

Dim.

Supponiamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia non decrescente, cioè

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \dots$$

Ci sono due possibilità:

(i) la successione è illimitata

(ii) la successione è limitata.

(i) Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ illimitata. Allora
$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists \ \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c. $a_{\bar{n}} \geq M$.

Poiché $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è non decrescente, si ha che $a_n \geq M \ \forall n \geq \bar{n}$. Cioè
$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

(ii) Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ limitata. Allora

si ha che $\sup\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\} = S \in \mathbb{R}$.

Dimostreremo che allora $\lim_{n\to\infty} a_n = S$.

Infatti $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c.

$S - \varepsilon < a_{\bar{n}} \leq S \leq S + \varepsilon$

(proprietà caratteristiche del sup)

e poiché $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è non decrescente, si ha che $\forall n \geq \bar{n}$

$S - \varepsilon < a_{\bar{n}} \leq a_n \leq S \leq S + \varepsilon$

Abbiamo quindi dimostrato che

$\lim_{n\to\infty} a_n = S$. ∎

<u>TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO</u>

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione t.c.
$\lim_{n\to+\infty} = l > 0$.

Allora $\exists\ \bar{n}$ t.c. $(\forall n \geq \bar{n})(a_n > 0)$.

<u>Dim.</u>

Si sceglie $\varepsilon = \frac{l}{2} > 0$. Dalla definizione di limite si ha che $\exists\ \bar{n}$ t.c. $(\forall\ n \geq \bar{n})\quad |a_n - l| < \varepsilon = l/2$.

Quindi $\forall\ n \geq \bar{n}$ si ha

$$\frac{l}{2} = l - \frac{l}{2} = l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon = l + \frac{l}{2} = \frac{3}{2}l$$

da cui la tesi. ☒

TEOREMA DEI CARABINIERI

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tre successioni t.c.

$(\forall n \in \mathbb{N})\quad (a_n \leq b_n \leq c_n)$.

Se $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = l$,

allora anche
$\lim_{n\to\infty} b_n = l$.

<u>Dim.</u>

Sia $\varepsilon > 0$. Allora $\exists\ \bar{n}_1 \in \mathbb{N}$ t.c. $(\forall n \geq \bar{n}_1)$ $(|a_n - l| < \varepsilon)$. Ed $\exists\ \bar{n}_2 \in \mathbb{N}$ t.c.

$(\forall\ n \geq \bar{n}_2)\quad (|c_n - l| < \varepsilon)$.

Posto $\bar{n} := \max\{\bar{n}_1, \bar{n}_2\}$, per $n \geq \bar{n}$ si ha:

$$\ell - \varepsilon < a_n < b_n < c_n < \ell + \varepsilon$$

e quindi $(\forall n \geq \bar{n})\ (|b_n - \ell| < \varepsilon)$

Abbiamo quindi dimostrato che

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \ell .$$

ESEMPIO

$a_n := \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

si ha $\quad 0 < \sin\left(\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$

e quindi $\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.

OPERAZIONI COI LIMITI

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni. Supponiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell_1 , \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = \ell_2 .$$

Allora:

(1) $\lim_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = \ell_1 + \ell_2$

(2) $\lim_{n\to+\infty} (a_n \cdot b_n) = \ell_1 \cdot \ell_2$

(3) Se $\ell_2 \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\ell_1}{\ell_2}$.

Dim.

(1) Sia $\varepsilon > 0$. $\exists\, \bar{n}_1 \in \mathbb{N}$ t.c. $(\forall n \geq \bar{n}_1)$

$(|a_n - \ell_1| < \varepsilon/2)$

$\exists\, \bar{n}_2 \in \mathbb{N}$ t.c. $(\forall n \geq \bar{n}_2)$

$(|b_n - \ell_2| < \varepsilon/2)$

Sia $\bar{n} := \max\{\bar{n}_1, \bar{n}_2\}$. Allora per $n \geq \bar{n}$ si ha:

$$|(a_n + b_n) - (\ell_1 + \ell_2)| \leq |a_n - \ell_1| + |b_n - \ell_2|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(2) Sia $\varepsilon > 0$. Sia $\varepsilon' := \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{(1 + |\ell_1| + |\ell_2|)}\right\}$

Allora $\exists\, \bar{n}_1 \in \mathbb{N}$ t.c. $(\forall n \geq \bar{n}_1)$ riesce

$(|a_n - \ell_1| < \varepsilon')$

$\exists\, \bar{n}_2 \in \mathbb{N}$ t.c. $(\forall n \geq \bar{n}_2)$ riesce

$(|b_n - \ell_2| < \varepsilon')$.

Sia $\bar{n} := \max\{\bar{n}_1, \bar{n}_2\}$. Allora per $n \geq \bar{n}$ si ha:

$$|a_n b_n - \ell_1 \ell_2| = |a_n b_n - \ell_1 b_n + \ell_1 b_n - \ell_1 \ell_2| \leq$$

$$\leq |b_n|\,|a_n - \ell_1| + |\ell_1|\,|b_n - \ell_2| \leq$$

$\leq (|b_n - l_2| + |l_2|)|a_n - l_1| + |l_1||b_n - l_2|$

$\leq (1 + |l_2|)\varepsilon' + |l_1|\varepsilon'$

$= (1 + |l_2| + |l_1|)\varepsilon' < \varepsilon$

(3) Sia $\lim_{n\to\infty} b_n = l_2 > 0$

sia $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon l_2^2}{2}$

$\exists\ \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall\ n \geq \bar{n}$ si ha

$|b_n - l_2| < \varepsilon'$ e $b_n > \dfrac{l_2}{2}$

Quindi $\forall\ n \geq \bar{n}$ si ha

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{l_2}\right| = \left|\frac{l_2 - b_n}{b_n l_2}\right| < \frac{\varepsilon'}{l_2^2/2} = \varepsilon.$$

$\blacksquare$

CONTINUITÀ E LIMITI DI SUCCESSIONI

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$. Sia $\bar{x} \in I$. Allora

f è continua in $\bar{x}$ $\Longleftrightarrow$

$\forall$ successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in I se $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ allora $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\bar{x})$.

Dimostrazione

Supponiamo che f sia continua in $\bar{x}$.
Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.c. $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$.
Vogliamo dimostrare che allora
$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\bar{x})$.

Sia quindi $\varepsilon > 0$. Poiché f è continua in $\bar{x}$, $\exists\, \delta > 0$ t.c. se $|x-\bar{x}| < \delta$, allora $|f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$
Poiché $x_n \xrightarrow{n\to\infty} \bar{x}$, $\exists\, \bar{n}$ t.c. se $n \geq \bar{n}$ allora $|x_n - \bar{x}| < \delta$.
Quindi se $n \geq \bar{n}$, allora
$|f(x_n) - f(\bar{x})| < \varepsilon$.
Quindi $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\bar{x})$.

Viceversa, supponiamo che $\forall\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione in I, se $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ allora $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\bar{x})$.
Vogliamo dimostrare che allora f è continua in $\bar{x}$.
Supponiamo per assurdo che non sia vero.

L'enunciato da negare è il seguente:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in I)(|x - \bar{x}| < \delta \rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon)$$

la negazione è

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in I)(|x - \bar{x}| < \delta \wedge |f(x) - f(\bar{x})| \geq \varepsilon)$$

specializzando $\delta = \frac{1}{n}$, si ha:

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists x_n \in I)(|x_n - \bar{x}| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - f(\bar{x})| \geq \varepsilon)$$

Abbiamo quindi costruito una successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.c.

a) $\lim_{n \to \infty} x_n = \bar{x}$

b) $|f(x_n) - f(\bar{x})| \geq \varepsilon \quad \forall n$.

contraddicendo l'ipotesi. ▨

ESEMPIO

Sia $a > 1$.

allora $\lim_{n \to \infty} a^{\frac{1}{n}} = a^0 = 1$.