OPERAZIONI COI LIMITI INFINITI - FORME INDETERMINATE

Si dimostra in modo diretto che:

1) Se $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$

allora $\lim_{n\to\infty} (a_n+b_n) = +\infty$

Se $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$

allora $\lim_{n\to\infty} (a_n+b_n) = +\infty$

2) Se $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$

allora $\begin{cases} \text{se } l>0 & \lim_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty \\ \text{se } l<0 & \lim_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty \end{cases}$

3) Se $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ allora

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$

Se $a_n > 0$ per $n \geq m$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

allora $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$

Sono invece "forme indeterminate" le seguenti situazioni:

(i) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n)$ con $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

$\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n$ con $\begin{cases} \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \\ \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \end{cases}$

Questo include anche i casi

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ con $\begin{cases} \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \\ \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \end{cases}$

oppure

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ con $\begin{cases} \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \\ \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty \end{cases}$.

(iii) $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n}$ con $\begin{cases} \lim_{n\to\infty} a_n = 1 \\ \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty \end{cases}$

questo si riconduce a

$\lim_{n\to\infty} A^{b_n \log_A a_n}$ $\quad A > 1$

dove l'esponente rientra nel caso (ii).

Oss. "forme indeterminate" non significa che la successione è indeterminata, ma che il limite non può essere risolto meccanicamente applicando le regole dell'algebra dei limiti, ma necessita di un'analisi "ad hoc".

Un esempio molto importante di forma indeterminata è la seguente

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

che ci porterà alla definizione del numero di Nepero "e".

IL NUMERO DI NEPERO

Consideriamo la seguente successione

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

1) Dimostriamo che $(a_n)_n$ è crescente.

Partiamo dal prodotto notevole

$$a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)(a^n+a^{n-1}b+\dots+b^n)$$

Si ha allora

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=$$

$$=\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)-\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n+\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)+\dots+\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$$

Da cui

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=-\frac{1}{n(n+1)}\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}+\dots+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]$$

$$\leq -\frac{n+1}{n(n+1)}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

Da cui

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\geq\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

$$=\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

Quindi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente.

2) Mostriamo che $(a_n)_n$ è superiormente limitata. Partiamo da

$$1^{n+1}-\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n+1}=$$

$$=\left[1-\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right]\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}+\dots+1\right]$$

$$\geq -\frac{(n+1)}{2n}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}$$

$$\Longrightarrow\quad 1\geq\left(1+\frac{1}{2n}-\frac{n+1}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}$$

$$\Longrightarrow\quad\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\leq 4\quad\forall n$$

e poiché $(a_n)_n$ è crescente, si ha che $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 4 \quad \forall n$.

Da 1) e 2) segue che

$$\exists \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n =: e$$

"e" si chiama numero di Nepero.

Per ora sappiamo che

$$2 \leq e \leq 4.$$

Richiamiamo le disuguaglianze di Bernoulli

$$(1+b)^n \geq 1+nb \quad ; \quad b>0, \ n\in\mathbb{N}$$

$$(1-b)^n \geq 1-nb \quad ; \quad |b|<1, \ n\in\mathbb{N}$$

ora

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

Per Bernoulli

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1-n\cdot\frac{1}{n^2} = 1-\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

$$\wedge\!\!|$$

$$1$$

Per il teorema dei carabinieri si ha quindi

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \cdot \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} e}$$

Da cui segue che

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$$

Sia ora $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione tale che

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty .$$

Dimostreremo che allora

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e^{-1}.$$

Per dimostrarlo introduciamo la notazione

$[x]$ = "parte intera di x" $\quad \forall\, x\in\mathbb{R}$.

ovvero $[x] = \max\{m \in \mathbb{Z},\ m \leq x\}$

si ha $[x] \leq x \leq [x]+1 \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$.

Ora osserviamo che, se $x_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$,

si ha $\forall\ n$ sufficientemente grande:

$$\left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]} \leq \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \leq \left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]+1}$$

per $n \to \infty$ e grazie al teorema dei carabinieri otteniamo

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$$

Analogamente:

$$\left(1-\frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]+1} \leq \left(1-\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \leq \left(1-\frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]}$$

e di nuovo otteniamo

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e^{-1}.$$

Corollario

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{\alpha}{x_n}\right)^{x_n} = e^{\alpha} \qquad \forall\ \alpha \in \mathbb{R}$$

se $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

OSSERVAZIONE

Per motivi che risulteranno chiari in seguito, la base standard per gli esponenziali e i logaritmi.

Sia x_n t.c. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$

e consideriamo

$$\lim_{n \to \infty} \log\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \log e = 1$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\log(1 + 1/x_n)}{1/x_n}$$

Analogamente

$$\lim_{n \to \infty} \log\left(1 - \frac{1}{x_n}\right)^{-x_n} = \log(e^{-1})^{-1} = 1$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\log\left(1 + \frac{1}{-x_n}\right)}{\left(1/_{-x_n}\right)}$$

Segue che se $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = 0$

allora

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log(1 + y_n)}{y_n} = 1$$

Inoltre, sempre con $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = 0$, consideriamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{y_n}-1}{y_n}$$

Poniamo $b_n = e^{y_n} - 1$ e osserviamo che $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ per la continuità della funzione e^x.

Allora

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{y_n}-1}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{\log(1+b_n)} = 1$$

Abbiamo quindi ottenuto i seguenti limiti notevoli:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{y_n}-1}{y_n} = 1 \quad \text{se} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+y_n)}{y_n} = 1 \quad \text{se} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = 0.$$

Sia ora $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ e sia $k>0$, $k\in\mathbb{R}$

Consideriamo $\lim_{n\to\infty} x_n^{-k} e^{x_n}$.

Mostreremo che

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{-k} e^{x_n} = +\infty$$

Si ha infatti

$$x_n^{-k} e^{x_n} = x_n^{-k} \left(e^{\frac{1}{2k}} \right)^{2k x_n}$$

$$\geq ([x_n]+1)^{-k} (1+b)^{2k[x_n]}$$

$$\underset{\boxed{\text{Bernoulli}}}{\geq} ([x_n]+1)^{-k} (1+[x_n]b)^{2k}$$

$$\geq ([x_n]+1)^{-k} (1+b)^{2k} (1+[x_n])^{2k}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

dove $b = -1 + e^{\frac{1}{2k}} > 0$

(Quindi l'esponenziale tende a $+\infty$ più rapidamente di qualunque polinomio)

Consideriamo ora

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{-k} \log x_n \qquad \text{dove } x_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$$

e $k > 0$, $k \in \mathbb{R}$

posto $\log x_n =: y_n$, osserviamo che $y_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$

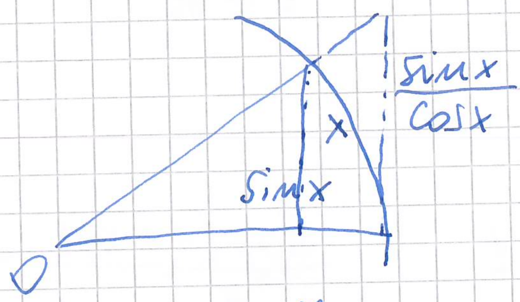
Si ha

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{-k} \log x_n = \lim_{n\to\infty} e^{-k y_n} y_n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(e^{y_n} y_n^{-1/k} \right)^{-k} = 0$$

(Il log va a $+\infty$ più lentamente di qualunque polinomio).

LIMITE FONDAMENTALE PER LE FUNZIONI GONIOMETRICHE.



Dagli assiomi della geometria euclidea si ha che

$$\sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x}$$

Da cui, per $x \neq 0$ piccolo

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

Se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è t.c. $x_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$,

si ha $\quad 1 \leq \dfrac{x_n}{\sin x_n} \leq \dfrac{1}{\cos x_n}$

Dal teorema dei carabinieri e dalla continuità di $\cos x$, si ha

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1 \quad \text{se} \quad x_n \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Corollario

Se $x_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$, $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{1 - \cos x_n}{x_n^2} = \frac{1}{2}$.

RIEPILOGO DEI LIMITI NOTEVOLI

•) Se $x_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{\alpha}{x_n}\right)^{x_n} = e^{\alpha} \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

•) Se $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$$\frac{e^{x_n}-1}{x_n} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \qquad \frac{\log(1+x_n)}{x_n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

•) Se $x_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$ e $k\in\mathbb{R}$, $k>0$

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{-k} e^{x_n} = +\infty \qquad \lim_{n\to\infty} x_n^{-k} \log x_n = 0$$

•) Se $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ e $k>0$

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{k} \log x_n = 0$$

•) Se $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos x_n}{x_n^2} = \frac{1}{2}$$