LIMITI DI FUNZIONI per $x \to x_0$

Def.

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Un punto $x_0 \in A$ si dice "punto isolato di A" $\iff (\exists r > 0)$ t.c. $A \cap \,]x_0 - r, x_0 + r[\, = \{x_0\}$.

ESEMPIO

Se $A = \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ n è un punto isolato di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$.

Def.

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice "punto di accumulazione di A" $\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in A)(x \neq x_0 \wedge |x - x_0| < \varepsilon)$.

(oss.: x_0 può appartenere o non appartenere ad A)

ESEMPIO

Se $A = \{1/n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$, si ha che 0 è punto di accumulazione per A.

Definizione (limite di funzioni)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, sia $f : A \to \mathbb{R}$ e sia x_0 punto di accumulazione di A.

Si dice che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad , \quad l \in \mathbb{R} \iff$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(0 < |x - x_0| < \delta \to |f(x) - l| < \varepsilon)$$

[Si legge: "il limite di $f(x)$ per x che tende a x_0 è l", oppure "$f(x)$ converge a l quando x converge a x_0".]

<u>Definizione</u>

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$; sia $f : A \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione di A. Si dice che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \iff$$

$$(\forall M > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(0 < |x - x_0| < \delta \to f(x) > M)$$

In modo analogo si definisce

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty .$$

<u>OSSERVAZIONE</u>

Il limite, se esiste, è unico. Infatti se esistessero due limiti distinti $l_1 \neq l_2$,

applicando la definizione con $\varepsilon = \frac{|\ell_2 - \ell_1|}{4}$
otterrei un assurdo.

OSSERVAZIONE

Se I è un intervallo e $x_0 \in I$
abbiamo definito la nozione di
continuità in x_0 per $f : I \to \mathbb{R}$.
Si vede immediatamente che
f è continua in x_0 $\iff$
$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Questa osservazione ci permette di
estendere la nozione di continuità
a insiemi più generali degli intervalli

Def. (continuità)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$.

Sia $x_0 \in A$. f si dice continua
in x_0 $\iff$ una delle seguenti
proprietà è verificata
(i) x_0 è punto isolato di A

(ii) x_0 è punto di accumulazione
di A e

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Abbiamo visto che la continuità di una funzione in un punto x_0 si può caratterizzare tramite i limiti di successioni.
La stessa cosa vale in generale per i limiti di funzioni.

TEOREMA PONTE (versione base)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$; sia $f: A \to \mathbb{R}$;
sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione di A.
Allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$

$\Longleftrightarrow$ ($\forall$ successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $A \setminus \{x_0\}$)
$\left(\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \ell \right)$

Dim.

Supponiamo che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$
Sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in $A \setminus \{x_0\}$
Vogliamo dimostrare che $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \ell$

Sia $\varepsilon > 0$. Poiché $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$,
$(\exists \delta > 0)\ (\forall x \in A)\ (0 < |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon)$

Poiché $x_n \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} x_0$ e $x_n \neq x_0$ $\forall n$,
$\exists\ \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq \bar{n}$, $0 < |x_n - x_0| < \delta$

- e quindi $\forall\, n \geq \bar{n} \quad |f(x_n) - \ell| < \varepsilon$.

Abbiamo cioè dimostrato che
$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \ell$.

Viceversa, supponiamo che ($\forall (x_n)_n$ successione in $A \setminus \{x_0\}$) si abbia che
$$\left(\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \ell \right).$$

Supponiamo per assurdo che non sia vero che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

L'enunciato da negare è:
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(0 < |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon)$$

La negazione è:
$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in A)(0 < |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - \ell| \geq \varepsilon)$$

specializzando $\delta = \frac{1}{n}$, si ha:
$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists x_n \in A)\left(0 < |x_n - x_0| < \tfrac{1}{n} \wedge |f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon\right)$$

Abbiamo quindi costruito una

successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $A\setminus\{x_0\}$, t.c.

$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ ma non è vero che

$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$. Assurdo. $\blacksquare$

TEOREMA PONTE (1^ VARIANTE)

Sia $A\neq\emptyset$, $f: A\to\mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione per A. Allora

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \iff$$

$$\left(\forall (x_n)_n \text{ successione in } A\setminus\{x_0\}\right)$$

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \pm\infty\right).$$

Dim.

Simile alla precedente. $\blacksquare$

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

Sia $A\subseteq\mathbb{R}$, $x_0\in\mathbb{R}$ punto di accumulazione di A, e sia $f: A\to\mathbb{R}$.

Supponiamo che $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell > 0$

Allora $\exists\, r>0$ t.c. se $x\in A$ e $0<|x-x_0|<r$, allora $f(x)>0$.

Dim.

Si applica la definizione di limite con $\varepsilon = l/2$. ☒

OSS.

Risultato analogo vale se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

TEOREMA DEI CARABINIERI

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione di A, e siano $f, g, h : A \to \mathbb{R}$, t.c. $\forall x \in A$

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

Se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l = \lim_{x \to x_0} h(x)$$

Allora anche

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = l.$$

Dim.

Sia $\varepsilon > 0$. $\exists\ \delta_1 > 0$ t.c. se $x \in A$ e $0 < |x - x_0| < \delta_1$, allora

$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

ed $\exists\ \delta_2 > 0$ t.c. se $x \in A$ e $0 < |x - x_0| < \delta_2$, allora

$$l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon$$

Sia $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Allora se $x \in A$ e $0 < |x - x_0| < \delta$, si ha

$$l - \varepsilon < f(x) < g(x) < h(x) < l + \varepsilon$$

Da cui la tesi. $\boxtimes$

ALGEBRA DEI LIMITI

Applicando il teorema ponte, si ottiene:

PROPOSIZIONE

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione di A; $f, g : A \to \mathbb{R}$.

Se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = l_2 \in \mathbb{R}$.

allora

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = l_1 + l_2$

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = l_1 l_2$

(3) se $l_2 \neq 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l_1}{l_2}$

Inoltre:

(1') se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \begin{cases} l \in \mathbb{R} \\ +\infty \end{cases}$ $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$,

allora $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = +\infty$.

(2') Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \begin{cases} l_1 > 0 \\ +\infty \end{cases}$ $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$,

allora $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = +\infty$

(3') Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, allora

$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

(4') Se $f(x) > 0$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, allora

$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

Dim.

Si applica il teorema ponte e le corrispondenti proprietà algebriche dei limiti di successione.

A titolo d'esempio dimostriamo la (1).

Sia $(x_n)_n$ successione in $A \setminus \{x_0\}$ con $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$. Allora

poiché $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_2$,

si ha che $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = l_1$ e $\lim_{n \to \infty} g(x_n) = l_2$. (per il teor. ponte)

Segue che $\lim_{n \to \infty} f(x_n) + g(x_n) = l_1 + l_2$.

Applicando il teorema ponte si ottiene

$$\lim_{x \to x_0} f(x)+g(x) = l_1 + l_2. \quad \boxed{}$$

PRIMO GRUPPO DI LIMITI NOTEVOLI

Applicando il teorema ponte si ottiene:

•) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$

•) $\lim_{x \to 0} x^k \log x = 0 \quad \forall k > 0$

•) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

LIMITE DELLA COMPOSTA DI DUE FUNZIONI

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione di A, $g: A \to \mathbb{R}$ e supponiamo che

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = l.$$

Sia ora $f:]l-r, l+r[\to \mathbb{R}$.

Allora se $\bar{\varepsilon} > 0$ è abbastanza piccolo, è definita $f \circ g$ su $A \cap]x_0 - \bar{\varepsilon}, x_0 + \bar{\varepsilon}[$

e allora ha senso chiedersi se esiste $\lim_{x \to x_0} (f \circ g)(x)$. Abbiamo due teoremi:

TEOREMA (limite della composizione di funzioni I)

Supponiamo che f di cui sopra sia continua in l. Allora

$$\lim_{x \to x_0} (f \circ g)(x) = f(l).$$

Dim.

Sia $(x_n)_n$ una successione in A con

$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$, e $x_n \neq x_0 \ \forall n$.

Vogliamo dimostrare che

$$\lim_{n \to \infty} f(g(x_n)) = f(l).$$

Sia $\varepsilon > 0$. Poiché f è continua in l, $\exists\ \delta > 0$ t.c. se $|y - l| < \delta$, allora $|f(y) - f(l)| < \varepsilon$.

Poiché $\lim_{n \to \infty} g(x_n) = l$,

$\exists\ \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c. se $n \geq \bar{n}$

$$|g(x_n) - l| < \delta.$$

Segue che se $n \geq \bar{n}$, $|f(g(x_n)) - f(l)| < \varepsilon$

Per il teorema ponte si ha quindi

$$\lim_{x \to x_0} (f \circ g)(x) = f(\ell) \qquad \square$$

TEOREMA (limite della composizione di funzioni II)

Sia f di cui sopra tale che

$$\exists \lim_{y \to \ell} f(y) = k$$

Sia inoltre g di cui sopra tale che $g(x) \neq \ell$ in un intorno di x_0, $x \neq x_0$.

Allora

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = k$$

Dim.

Sia $(x_n)_n$ una successione in $A \setminus \{x_0\}$ con $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$.

Vogliamo dimostrare che allora

$$\lim_{n \to \infty} (f \circ g)(x_n) = k.$$

Poiché $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$, per il teorema ponte si ha $\lim_{n \to \infty} g(x_n) = \ell$.

Poiché per ipotesi $g(x_n) \neq \ell$ per n grande, applicando il teorema ponte a f otteniamo

$$\lim_{n\to\infty} f(g(x_n)) = k .$$

Per il teorema ponte applicato a $(f\circ g)$, vista l'arbitrarietà di $(x_n)_n$, otteniamo che

$$\lim_{x\to x_0} (f\circ g)(x) = k .$$

$\blacksquare$

Osservazione

Se nell' ultimo teorema togliamo l'ipotesi $g(x)\neq l$ per x vicino a x_0, il risultato non vale più. Il controesempio è questo:

$$g(x)\equiv 0 \qquad f(x)=\begin{cases} 1 & \text{se } x\neq 0 \\ 0 & \text{se } x=0 \end{cases}$$

Si ha $f(g(x))\equiv 0$ e quindi

$$\lim_{x\to 0} f(g(x)) = 0 \quad \text{mentre}$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0 \qquad \lim_{y\to 0} f(y) = 1 .$$

ESEMPI

•) $\displaystyle\lim_{x\to 0} e^{\frac{\sin x}{x}} = e^{1} = e$ (I teor)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x \log x)}{x \log x} = 1 \quad (\text{II teor.})$$

$$\lim_{x\to 0} \sin x \log(\sin x) = 0 \quad (\text{II teor.})$$

LIMITI DI FUNZIONI per $x \to \pm\infty$

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ superiormente illimitato.

Diremo che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

se e solo se

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k > 0)(\forall x \in A)(x \geq k \to |f(x) - \ell| < \varepsilon)$$

Diremo che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$$

se e solo se

$$(\forall M > 0)(\exists k > 0)(\forall x \in A)(x \geq k \to f(x) \geq M)$$

resp. $(x \geq k \to f(x) \leq -M)$

Si dimostrano i seguenti risultati

(in modo analogo a quelli per $\lim_{x\to x_0}$)

1) Il limite, se esiste, è unico.

2) Teorema ponte (seconda e terza variante)

(i) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \iff$

$(\forall$ successione $(x_n)_n$ in $A)$ $(\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$
$\longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$)

(ii) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty \iff$

$(\forall$ successione $(x_n)_n$ in $A)$ $(\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$
$\longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \pm\infty$).

3) Teorema della permanenza del segno: se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l > 0$,
$\exists\ k > 0$ t.c. se $x \in A \cap]k, +\infty[$ allora
$f(x) > 0$.

4) Teorema dei carabinieri:
Siano $f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall \quad x \in A$.
Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l = \lim_{x\to+\infty} h(x)$,
allora $\lim_{x\to+\infty} g(x) = l$.

5) Algebra dei limiti:

Sia A superiormente limitato.
Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$. Se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$
e $\lim_{x \to +\infty} g(x) = l_2 \in \mathbb{R}$

allora

(i) $\lim_{x \to +\infty} f(x) + g(x) = l_1 + l_2$

(ii) $\lim_{x \to +\infty} f(x) \cdot g(x) = l_1 \cdot l_2$

(iii) se $l_2 \neq 0$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$

Inoltre:

(i') se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \begin{cases} l \in \mathbb{R} \\ +\infty \end{cases}$ e $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$,

$\lim_{x \to +\infty} (f(x) + g(x)) = +\infty$

(ii') se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \begin{cases} l_1 > 0 \\ +\infty \end{cases}$ e $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

allora $\lim_{x \to +\infty} f(x) \cdot g(x) = +\infty$

(iii') se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, allora

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$

(iv') se $f(x) > 0$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, allora

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.