SECONDO GRUPPO DI LIMITI NOTEVOLI

Applicando il teorema ponte, si ottiene:

•) $\lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha \qquad \alpha \in \mathbb{R}$

•) $\lim_{x \to +\infty} x^{-k} e^x = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^{-k} \log x = 0$

$\forall \; k > 0; \; k \in \mathbb{R}$.

COMPOSIZIONE DI FUNZIONI

Se $\lim_{x \to +\infty} g(x) = l$ e f è continua in un intorno di l, allora

$\lim_{x \to +\infty} f(g(x)) = f(l)$.

Se $\lim_{x \to +\infty} g(x) = l$ e $g(x) \neq l$ per x sufficientemente grande, e se f è definita in un intorno di l e $\lim_{y \to l} f(y) = k$, allora

$$\lim_{x \to +\infty} f(g(x)) = k.$$

LIMITE DESTRO E SINISTRO

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione di A.

Diremo che ℓ^+ è il limite destro di f per x che tende a x_0 da destra $\Leftrightarrow$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(x_0 < x < x_0 + \delta \rightarrow |f(x) - \ell^+| < \varepsilon)$$

Diremo che ℓ^- è il limite sinistro di f per x che tende a x_0 da sinistra $\Leftrightarrow$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(x_0 - \delta < x < x_0 \rightarrow |f(x) - \ell^-| < \varepsilon)$$

Si scrive:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell^+ \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell^-$$

Si ha che $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow$

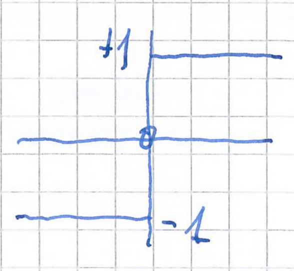
$\exists \displaystyle\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell^+$, $\exists \displaystyle\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell^-$ e $\ell^+ = \ell^-$.

ESEMPIO

$$f(x) = \frac{x}{|x|}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +1$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$



In modo analogo si definisce:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm \infty \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm \infty .$$

CLASSIFICAZIONE DELLE DISCONTINUITÀ

Sia I un intervallo, sia $x_0 \in I$ e supponiamo che f non sia continua in x_0, cioè che $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Ci sono tre possibilità:

1) esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \neq f(x_0)$.

In tal caso si dice che x_0 è una discontinuità eliminabile. Infatti definendo

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & x \neq x_0 \\ \ell & x = x_0 \end{cases}$$

si ottiene una funzione $\tilde{f}$ continua in x_0.

2) esiste $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell^- \in \mathbb{R}$

esiste $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell^+ \in \mathbb{R}$

Allora si dice che c'è un salto.

3) tutti gli altri casi vengono definiti "discontinuità" di III specie.

ASINTOTI VERTICALI

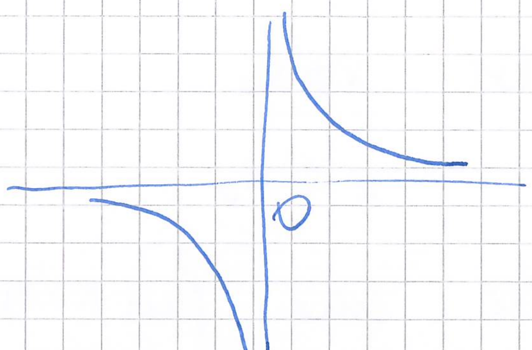
Sia $f:]a,b[\cup]b,c[\to \mathbb{R}$

Se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$ si dice che la retta verticale $x = x_0$ è un asintoto verticale sinistro.

Se $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ si dice che la retta verticale $x = x_0$ è un asintoto verticale destro.

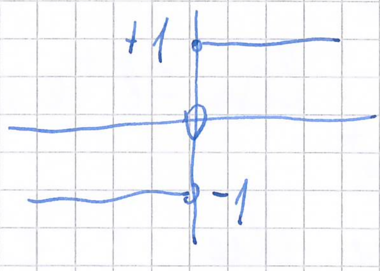
ESEMPI

$f(x) = \dfrac{1}{x}$



$x=0$ è asintoto verticale sia destro che sinistro.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



salto

ASINTOTI ORIZZONTALI

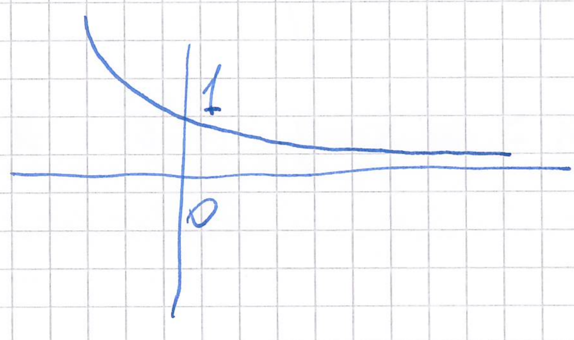
Se $f:]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = c \in \mathbb{R}$,

si dice che la retta $y = c$ è un asintoto orizzontale a $+\infty$

(analoga definizione a $-\infty$)

ESEMPIO

$f(x) = e^{-x}$



ASINTOTI OBLIQUI

Sia $f:]a, +\infty[\to \mathbb{R}$, con $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$

La retta

$$y = mx + q, \quad m \neq 0,$$

si dice asintoto obliquo per f a $+\infty$

$$\iff \lim_{x \to +\infty} f(x) - (mx + q) = 0$$

Per trovare un eventuale asintoto obliquo, bisogna

a) controllare che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$

b) calcolare $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

se tale limite esiste e $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$, allora

c) si calcola $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx)$.

Se tale limite esiste finito e $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = q$, allora la retta $y = mx + q$ è asintoto obliquo.

ESEMPIO

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x} - x\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1-x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$\Rightarrow$ $y = x$ è asintoto a $+\infty$