Algebra Lineare ed Elementi di Geometria
Matematica per l'Economia e la Statistica 2
A.A. 2023/24
Prova scritta del 27.05.2024

Cognome	Nome

(1) **(5 punti)** (a) Si dia la definizione di applicazione lineare tra spazi vettoriali. (b) Si dia la definizione di base di uno spazio vettoriale. (c) Si dimostri il Teorema di Struttura per le applicazioni lineari.

(2) Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 - x_3 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) **(2 punti)** Si scriva la matrice $A = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$ di f nella base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$.

(b) **(4 punti)** Si determini una base di $\ker(f)$, una base di $\operatorname{im}(f)$, e le dimensioni di $\ker(f)$ e $\operatorname{im}(f)$. Si determini, se esiste, un vettore $\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in \operatorname{im}(f)$ tale che $x_2 + x_3 = 1$.

(c) **(3 punti)** Si trovi il valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ tale per cui il sistema lineare $A \cdot X = \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ 1+\alpha \\ 2 \end{pmatrix}$ sia compatibile.

Considerato il sistema lineare per tale specifico valore di α, si trovi la sua generica soluzione.

(3) Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -9 & -6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) **(4 punti)** Si determini il polinomio caratteristico di $L_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e il suo spettro.

(b) **(5 punti)** Si trovi una base $\mathcal{B}$ di autovettori per L_A.
Si calcoli la matrice di cambio di base $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ dove $\mathcal{E}$ è la base standard di $\mathbb{R}^3$.

(4) (a) **(3 punti)** Si determinino equazioni parametriche di una qualsiasi retta $\ell \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ che soddisfi **entrambe** le condizioni seguenti:

- ℓ interseca la retta $\ell' \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ di equazioni cartesiane $x + 2z = -1$ e $x - y = 2$;
- ℓ passa per il punto $Q = (0, 1, 3)$.

(b) **(5 punti)** Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si considerino la retta r e il piano H

$$r\colon \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \qquad\qquad H\colon\ x + 2y - 2z = 2$$

Descrivere la posizione reciproca tra r e H.
Se r ed H sono incidenti in un punto, determinare tale punto.
Se r è parallela ad H ed $r \cap H = \emptyset$, trovare un piano K che contenga r e sia parallelo ad H.
Se r ed H sono sghembi, trovare equazioni parametriche di una retta s che intersechi sia r che H.