**Algebra Lineare ed Elementi di Geometria**
**Matematica per l'Economia e la Statistica 2**
**A.A. 2023/24**
**Prova scritta del 11.06.2024**

| Cognome | Nome |
|---|---|
| | |

(1) **(5 punti)** (a) Si dia la definizione di rango di una matrice. (b) Si dia la definizione di indipendenza lineare. (c) Si enunci e si dimostri il teorema che lega le dimensioni del dominio, del nucleo e dell'immagine di un'applicazione lineare.

(2) Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,x_1 - 2\,x_2 + 2\,x_3 \\ -2\,x_1 + x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) **(2 punti)** Si scriva la matrice $A = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$ di $f$ nella base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$.

(b) **(4 punti)** Si determini una base di $\ker(f)$, una base di $\operatorname{im}(f)$, e le dimensioni di $\ker(f)$ e $\operatorname{im}(f)$. Si determini, se esiste, un vettore $\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in \ker(f)$ tale che $x_2 + x_3 = 1$.

(c) **(3 punti)** Si trovi un valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ tale per cui il sistema lineare $A \cdot X = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sia compatibile. Considerato il sistema lineare per tale specifico valore di $\alpha$, si trovi la sua generica soluzione.

(3) Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ 8 & 5 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) **(4 punti)** Si determini il polinomio caratteristico di $L_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e il suo spettro.

(b) **(5 punti)** Si trovi una base $\mathcal{B}$ di autovettori per $L_A$.
Si calcoli la matrice di cambio di base $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ dove $\mathcal{E}$ è la base standard di $\mathbb{R}^3$.

(4) (a) **(3 punti)** Si determinino equazioni cartesiane del piano $H \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ che passa per i punti

$$P_1 = (1, 0, 1), \quad P_2 = (0, 1, 0), \quad P_3 = (2, 0, 0).$$

(b) **(5 punti)** Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si considerino la retta $r$ e il piano $H$

$$r\colon \begin{cases} 2x + y = -1 \\ z + 2y = 0 \end{cases} \qquad H\colon \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2t - 3s \\ z = 1 - t + 2s \end{cases}$$

Descrivere la posizione reciproca tra $r$ e $H$.
Se $r$ ed $H$ sono incidenti in un punto, determinare tale punto.
Se $r$ è parallela ad $H$ ed $r \cap H = \emptyset$, trovare un piano $K$ che contenga $r$ e sia parallelo ad $H$.
Se $r$ ed $H$ sono sghembi, trovare equazioni parametriche di una retta $s$ che intersechi sia $r$ che $H$.