

# Geometria 3 – Topologia

## I appello d'esame

Anno accademico 2024-2025

13/1/2025

Motivare adeguatamente le risposte. Per l'ammissione all'orale occorrono almeno 18 punti.  
Tempo a disposizione: 3 ore.

1) (10 punti) Consideriamo il sottospazio

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1)(x^2 + y^2 - 1) = 0\} \subset \mathbb{R}^2.$$

(a) (2 punti)  $X$  è compatto?

(b) (2 punti)  $X$  è connesso per archi?

(c) (2 punti) Quante componenti connesse per archi ha  $\mathbb{R}^2 - X$ ?

(d) (4 punti) Calcolare  $\pi_1(X)$ .

2) (6 punti) Dimostrare che non esiste una retrazione continua di  $S^2$  su  $S^1$ .

3) (8 punti) Sia  $f: X \rightarrow Y$  un'applicazione continua suriettiva tra spazi topologici, con  $X$  compatto. Dimostrare che  $Y$  è compatto.

4) (6 punti) Dimostrare le seguenti due:

(a) (3 punti)  $X_{\text{cof}}$  è connesso se  $X$  è un insieme infinito;

(b) (3 punti)  $\mathbb{R}_{\text{cof}}$  è connesso per archi.