

Geometria 3 – Topologia

II appello d'esame

Anno accademico 2024-2025

10/2/2025

Motivare adeguatamente le risposte. Per l'ammissione all'orale occorrono almeno 18 punti.
Tempo a disposizione: 3 ore.

- 1) (7 punti) Sia $D = \{0, 1\}_{\text{dis}}$. Dimostrare che uno spazio topologico X è connesso se e solo se ogni funzione continua $f: X \rightarrow D$ è costante.
- 2) (8 punti) Sia $L \subset \mathbb{R}^3$ una retta.
 - a) (4 punti) Dimostrare che $\mathbb{R}^3 - L$ è connesso per archi.
 - b) (4 punti) Calcolare $\pi_1(\mathbb{R}^3 - L)$.
- 3) (7 punti) Sia $U \subset \mathbb{R}^3$ un aperto non vuoto. Dimostrare che U non si può immergere in \mathbb{R}^2 .
- 4) (8 punti) Siano X uno spazio di Hausdorff, $Y \subset X$ un sottospazio compatto e $x \in X - Y$. Dimostrare che esistono due aperti disgiunti $U, V \subset X$ tali che $x \in U$ e $Y \subset V$.