Geometria 3 — Topologia
Programma del corso

Docente: Prof. Daniele Zuddas

Anno accademico 2024-2025

Spazi topologici Topologie su insiemi, sottoinsiemi aperti e chiusi, basi di aperti, topologia banale, discreta e cofinita. Spazi metrici, spazi vettoriali normati, topologia Euclidea su $\mathbb{R}^n$ e su $\mathbb{C}^n$, distanze equivalenti, spazi metrizzabili. Sottospazi topologici, ipersfere. Retta di Sorgenfrey. Intorni, basi di intorni. Applicazioni continue, aperte, chiuse, omeomorfismi e omeomorfismi locali, immersioni e immersioni locali, continuità negli spazi metrici.

Operatori topologici Chiusura, frontiera, interno, esterno. Chiusura negli spazi metrici.

Operazioni topologiche Unioni e prodotti topologici, proiezioni canoniche, tori. Topologia quoziente, retta con due origini, spazi proiettivi reali e complessi, proiettività, carte affini. Incollamenti topologici. Sfere come unioni di dischi. Quozienti notevoli del quadrato: cilindro, toro, striscia di Möbius, bottiglia di Klein. Relazione d'equivalenza indotta da un'applicazione.

Assiomi di separazione T_1, T_2 (spazi di Hausdorff), T_3 (spazi regolari), T_4 (spazi normali). Normalità degli spazi metrizzabili, proprietà topologiche, ereditarietà.

Assiomi di numerabilità Spazi I-numerabili e II-numerabili, sottoinsiemi densi, spazi separabili, proprietà di numerabilità degli spazi Euclidei.

Compattezza Ricoprimenti aperti, spazi compatti e localmente compatti, teoremi di omeomorfismo e immersione da spazi compatti a spazi di Hausdorff. Teorema di Tychonoff (dimostrazione solo per prodotti finiti). Compattezza di $[0, 1]$, teorema di Heine-Borel. Cenni sulla compattezza per successioni, unicità del limite negli spazi di Hausdorff, equivalenza tra compattezza e compattezza per successioni negli spazi metrizzabili (senza dimostrazione). Compattificazione di Alexandroff, applicazioni proprie, proiezione stereografica, S^n come compattificazione di Alexandroff di $\mathbb{R}^n$. Topologia di $\mathbb{RP}^1$ e di $\mathbb{CP}^1$.

Connessione Spazi connessi, connessione di $[0, 1]$. Componenti connesse. Spazi localmente connessi. Cenni sugli spazi totalmente sconnessi. Cammini continui, concatenazione di cammini, cammino inverso. Spazi connessi per archi. Componenti connesse per archi. Spazi localmente connessi per archi. Esempio di spazio connesso ma non connesso per archi. Componenti connesse degli aperti di $\mathbb{R}^n$. Sottospazi connessi di $\mathbb{R}$.

Rivestimenti Aperti banalizzanti, rivestimenti banali, rivestimenti di S^1, rivestimento di $\mathbb{RP}^n$. Lemma del numero di Lebesgue.

Omotopia Applicazioni omotope, omotopia relativa, equivalenza omotopica tra spazi, spazi contraibili, convessi di $\mathbb{R}^n$, retrazioni, retrazioni per deformazione, omotopia di cammini. Teoremi di sollevamento di cammini e omotopie rispetto ad un rivestimento.

Gruppo fondamentale Cappi e loro omotopie, gruppo fondamentale, omomorfismi indotti da applicazioni continue, funtorialità. Funzione di sollevamento. Gruppo fondamentale di S^1. Teorema di invarianza omotopica, isomorfismo indotto da un cammino e dipendenza dal punto base. Gruppo fondamentale di uno spazio prodotto. Spazi semplicemente connessi e cenni sui rivestimenti universali. Gruppi fondamentali di sfere, tori e spazi proiettivi reali e complessi.

Elementi di topologia del piano Teorema di non retrazione, teorema del punto fisso di Brouwer, teorema di Borsuk-Ulam.