Corso di Laurea Triennale
in Matematica

Geometria 3
Topologia

Docente: Prof. Daniele Zuddas

Anno accademico 2024–2025

Spazi topologici

Def. Sia X un insieme. L'insieme

$$\mathcal{P}(X) = \{U \mid U \subset X\}$$

i cui elementi sono tutti i sottoinsiemi di X è detto *insieme delle parti* (o *insieme potenza*) di X.

Oss. $\mathcal{P}(X) \cong \{0,1\}^X = \{\text{funzioni } X \to \{0,1\}\} \Rightarrow |\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$.

Leggi di De Morgan.
$$X - \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = \bigcap_{\alpha\in A} (X - U_\alpha)$$
$$X - \bigcap_{\alpha\in A} U_\alpha = \bigcup_{\alpha\in A} (X - U_\alpha).$$

Def. Una *topologia* su X è una famiglia $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ di sottoinsiemi di X che soddisfa:

(*1*) $\emptyset \in \mathcal{T}$

(*2*) $X \in \mathcal{T}$

(*3*) $\forall \{U_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$

(*4*) $\forall U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$.

Uno *spazio topologico* $(X, \mathcal{T})$ è un insieme X munito di una topologia $\mathcal{T}$ su X. Gli elementi di X sono detti *punti*. Scriveremo X anziché $(X, \mathcal{T})$ se $\mathcal{T}$ è sottinteso.

Def. $(X, \mathcal{T})$ spazio topologico.

- $U \subset X$ è detto *aperto* in $X \Leftrightarrow U \in \mathcal{T}$.
- $C \subset X$ è detto *chiuso* in $X \Leftrightarrow X - C$ aperto $\Leftrightarrow X - C \in \mathcal{T}$.

Oss. Per una topologia $\mathcal{T}$ su X abbiamo:

(*1*) $\emptyset$ è aperto e chiuso in X

(*2*) X è aperto e chiuso in X

(*3*) unioni arbitrarie di aperti di X sono aperte in X

(*4*) intersezioni finite di aperti di X sono aperte in X (per induzione):
$\forall n \in \mathbb{N}, \forall U_1 \dots, U_n \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}$.

(*3'*) intersezioni arbitrarie di chiusi sono chiuse:
$\forall \{C_\alpha\}_{\alpha\in A}$ famiglia di chiusi in $X \Rightarrow \bigcap_{\alpha\in A} C_\alpha$ chiuso in X

(*4'*) unioni finite di chiusi sono chiuse:
$\forall n \in \mathbb{N}, \forall C_1 \dots, C_n$ chiusi in $X \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ chiuso in X.

Oss. Per determinare $\mathcal{T}$ è sufficiente dichiarare gli aperti (oppure i chiusi) in modo che siano soddisfatte le proprietà precedenti.

Esempio. I seguenti esempi sono basilari e verranno usati spesso.

(1) Topologia banale su X: $\mathcal{T}_{\text{ban}} = \{\emptyset, X\} \rightsquigarrow X_{\text{ban}} = (X, \mathcal{T}_{\text{ban}})$.
È la topologia minimale, gli unici aperti sono il vuoto e lo spazio.

(2) Topologia discreta su X: $\mathcal{T}_{\text{dis}} = \mathcal{P}(X) \rightsquigarrow X_{\text{dis}} = (X, \mathcal{T}_{\text{dis}})$.
È la topologia massimale, tutti i sottoinsiemi sono aperti e chiusi.

(3) Topologia cofinita su X: $\mathcal{T}_{\text{cof}} = \{U \subset X \mid X - U \text{ finito}\} \cup \{\emptyset\} \rightsquigarrow X_{\text{cof}} = (X, \mathcal{T}_{\text{cof}})$.
Gli aperti sono i complementari dei sottoinsiemi finiti e il vuoto.
I chiusi sono i sottoinsiemi finiti e X.

Oss.

(1) X discreto $\Leftrightarrow$ i singoletti dei punti sono aperti.

(2) $\mathcal{T}_{\text{dis}} = \mathcal{T}_{\text{cof}} \Leftrightarrow X$ finito.

Basi di topologie

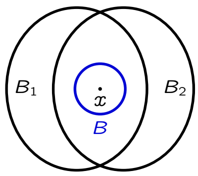
Def. Una famiglia $\mathcal{B}$ di aperti di uno spazio topologico X è detta *base* per X se $\forall\, U \subset X$ aperto, $\exists\, \{B_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{B}$ t.c. $U = \bigcup_{i\in I} B_i$. Gli elementi di $\mathcal{B}$ sono detti *aperti basici*.

In altre parole $\mathcal{B}$ è base per $X \Leftrightarrow$ gli elementi di $\mathcal{B}$ sono aperti e ogni aperto di X è unione di elementi di $\mathcal{B}$.

Oss. Per definizione di base, se $\mathcal{B}$ è base per X allora $U \subset X$ aperto $\Leftrightarrow$ $\forall\, x \in U$, $\exists\, B \in \mathcal{B}$ t.c. $x \in B \subset U$.

Esempio. La famiglia dei singoletti $\mathcal{B} = \{\{x\} \mid x \in X\}$ è base per la topologia discreta.

Teor. *Sia X un insieme e $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ una famiglia di sottoinsiemi di X. Allora $\exists\, \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ topologia su X t.c. $\mathcal{B}$ è base per $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} \Leftrightarrow$*



(1) $X = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$

(2) *$\forall\, B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $\forall\, x \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \exists\, B \in \mathcal{B}$ t.c. $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.*

Inoltre $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ è unica (topologia generata da $\mathcal{B}$).

Dim. $\boxed{\Rightarrow}$ Segue subito dalla definizione e osservazione precedente.
$\boxed{\Leftarrow}$ Definiamo

$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \left\{ \bigcup_{B\in J} B \;\middle|\; J \subset \mathcal{B} \right\}$$

l'insieme di tutte e sole le unioni di elementi di $\mathcal{B}$.

Oss. Per definizione di $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, $U \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}} \Leftrightarrow \forall\, x \in U$, $\exists\, B \in \mathcal{B}$ t.c. $x \in B \subset U$.

Mostriamo che $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ è una topologia su X.

(1) $\emptyset \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, ottenuto con $J = \emptyset$

(2) $X \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, ottenuto con $J = \mathcal{B}$ in virtù di (1)

(3) $\forall\, \{U_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{B}} \Rightarrow \forall \alpha \in A$, $\exists\, J_\alpha \subset \mathcal{B}$ t.c.
$U_\alpha = \bigcup_{B\in J_\alpha} B \;\Rightarrow\; \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = \bigcup_{B\in J} B \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ con $J = \bigcup_{\alpha\in A} J_\alpha \subset \mathcal{B}$

(4) $\forall\, U_1, U_2 \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, $\forall\, x \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow \exists\, B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ t.c. $x \in B_1 \subset U_1$ e $x \in B_2 \subset U_2 \Rightarrow x \in B_1 \cap B_2 \subset U_1 \cap U_2 \underset{(2)}{\Rightarrow} \exists B \in \mathcal{B}$ t.c. $x \in B \subset B_1 \cap B_2 \subset U_1 \cap U_2 \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

$\forall\, B \in \mathcal{B} \Rightarrow B \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ ottenuto con $J = \{B\} \Rightarrow \mathcal{B}$ è base per $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

L'unicità segue subito dalle due osservazioni precedenti. $\square$