Topologie notevoli su $\mathbb{R}$

Topologia Euclidea su $\mathbb{R}$. $\mathcal{B} = \{]a, b[\mid a < b\}$ è base per una topologia su $\mathbb{R}$. Infatti

(1) L'unione di tutti gli intervalli aperti limitati è $\mathbb{R}$

(2) L'intersezione di due intervalli aperti limitati è vuota oppure un intervallo aperto limitato ($\in \mathcal{B}$).

Si ha: $U \subset \mathbb{R}$ aperto $\Leftrightarrow \forall\, x \in U\ \exists\, a < b$ t.c. $x \in\,]a, b[\, \subset U$.

$]a, +\infty[\, = \bigcup\limits_{b>a}\,]a, b[$, $]-\infty, b[$ aperti.

$\{a\}$, $[a, b]$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, b]$ chiusi (ma esistono molti altri chiusi).

$[a, b[$ e $]a, b]$ non sono né aperti né chiusi in $\mathbb{R}$, $\forall a < b$.

Retta di Sorgenfrey. $\mathcal{B}_\ell = \{[a, b[\mid a < b\}$ è base per una topologia su $\mathbb{R}$ detta *topologia di Sorgenfrey* o *topologia degli intervalli aperti a destra*. Denotiamo con $\mathbb{R}_\ell$ questo spazio topologico (*retta di Sorgenfrey*).

Oss. $]a, b[\, = \bigcup\limits_{c \in]a,b[} [c, b[$ aperto in $\mathbb{R}_\ell \Rightarrow$ aperti Euclidei sono aperti in $\mathbb{R}_\ell$ (ma non viceversa). I chiusi Euclidei di $\mathbb{R}$ sono chiusi in $\mathbb{R}_\ell$.

$[a, +\infty[\, = \bigcup\limits_{c>a} [a, c[$ aperto in $\mathbb{R}_\ell$.

$[a, b]$ chiuso in $\mathbb{R}_\ell$ (perché chiuso in $\mathbb{R}$).

$[a, b[\, = \mathbb{R}_\ell - \big(]-\infty, a[\, \cup [b, +\infty[\big) \Rightarrow [a, b[$ chiuso (e aperto) in $\mathbb{R}_\ell$.

Intorni e basi di intorni

Def. X spazio topologico, $J \subset X$ è *intorno* di $x \in X$ se $\exists\, U \subset X$ aperto t.c. $x \in U \subset J$.

Esempio. $U \subset X$ aperto non vuoto è intorno di ogni suo punto (*intorno aperto*).

$[-1, 1] \subset \mathbb{R}$ è intorno di 0, e di ogni $x \in\,]-1, 1[$, ma non di -1 e di 1. Infatti $-1 \in\,]a, b[\, \subset [-1, 1]$ è impossibile.

Oss. $U \subset X$ aperto $\Leftrightarrow \forall\, x \in U$, $\exists\, J \subset X$ intorno di x in X t.c. $J \subset U$.

Def. X spazio topologico, $\mathcal{J}$ famiglia di intorni di $x \in X$ è *base di intorni* (o *sistema fondamentale di intorni*) di x se $\forall\, L \subset X$ intorno di x, $\exists\, J \in \mathcal{J}$ t.c. $x \in J \subset L$.

Oss. Nella definizione possiamo limitarci a L intorno aperto di x.

Esempio. $x \in \mathbb{R} \rightsquigarrow \mathcal{J}_x = \left\{ \left]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right[\,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$ base d'intorni di x.

Def. $J \subset X$ è *intorno* di $A \subset X$ se $\exists\, U \subset X$ aperto t.c. $A \subset U \subset J$.

Def. $\mathcal{J}$ famiglia di intorni di $A \subset X$ è *base di intorni* (o *sistema fondamentale di intorni*) di A se $\forall\, L \subset X$ intorno (aperto) di A, $\exists\, J \in \mathcal{J}$ t.c. $A \subset J \subset L$.

Operatori topologici

X spazio topologico, $A \subset X$ sottoinsieme di X.

Def (Interno)**.** Si chiama *interno* di A in X il sottoinsieme

$$\operatorname{Int}_X A \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{\substack{U \subset A \\ U \text{ aperto}}} U$$

unione di tutti gli aperti di X contenuti in A.

Oss. $\operatorname{Int}_X A$ è il più grande aperto di X contenuto in A.
$\operatorname{Int}_X A \subset A$ e vale $= \Leftrightarrow A$ aperto in X.
$U \subset A$ e U aperto in $X \Rightarrow U \subset \operatorname{Int}_X A$.
$x \in \operatorname{Int}_X A \Leftrightarrow \exists\, U \subset X$ intorno di x in X t.c. $U \subset A$.

Esempio. $\operatorname{Int}_{\mathbb{R}}[0,1] =]0,1[$, $\operatorname{Int}_{\mathbb{R}}\{0\} = \emptyset$, $\operatorname{Int}_{\mathbb{R}_\ell}[0,1] = [0,1[$

Def (Chiusura)**.** Si chiama *chiusura* di A in X il sottoinsieme

$$\operatorname{Cl}_X A \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{\substack{C \supset A \\ C \text{ chiuso}}} C$$

intersezione di tutti i chiusi di X che contengono A.

Oss. $\operatorname{Cl}_X A$ è il più piccolo chiuso di X che contiene A.
$A \subset \operatorname{Cl}_X A$ e vale $= \Leftrightarrow A$ chiuso in X.
$A \subset C$ e C chiuso in $X \Rightarrow \operatorname{Cl}_X A \subset C$.

Prop. *$x \in \operatorname{Cl}_X A \Leftrightarrow \forall\, U \subset X$ intorno (aperto) di x in X si ha $U \cap A \neq \emptyset$.*

Dim. Senza perdita di generalità basta considerare U intorno aperto di x.
$\boxed{\Rightarrow}$ Per assurdo, supponiamo $U \cap A = \emptyset \Rightarrow A \subset X - U$ chiuso $\Rightarrow \operatorname{Cl}_X A \subset X - U \Rightarrow x \in X - U$ assurdo perché $x \in U$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Per assurdo, supponiamo $x \notin \operatorname{Cl}_X A \Rightarrow x \in U := X - \operatorname{Cl}_X A$ aperto $\Rightarrow U \cap A \subset U \cap \operatorname{Cl}_X A = \emptyset \Rightarrow U \cap A = \emptyset$ assurdo. $\square$

Def (Frontiera)**.** Si chiama *frontiera* (o *bordo*) di A in X il sottoinsieme

$$\operatorname{Fr}_X A \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Cl}_X A \cap \operatorname{Cl}_X(X - A)$$

intersezione delle chiusure di A e del complementare.

Si usa anche la notazione $\operatorname{Fr}_X A = \partial_X A = \partial A$.

Oss. $\operatorname{Fr}_X A$ è chiuso in X e $\operatorname{Fr}_X A \subset \operatorname{Cl}_X A$.
$x \in \operatorname{Fr}_X A \Leftrightarrow \forall\, U \subset X$ intorno di x in X, si ha $U \cap A \neq \emptyset$ e $U \cap (X - A) \neq \emptyset$.

Teor. *$\operatorname{Fr}_X A = \operatorname{Cl}_X A - \operatorname{Int}_X A$.*

Dim. Mostriamo le due inclusioni.
$\boxed{\subset}$ Sappiamo $\operatorname{Fr}_X A \subset \operatorname{Cl}_X A$. Resta da dimostrare $\operatorname{Fr}_X A \cap \operatorname{Int}_X A = \emptyset$. Per assurdo se $\exists\, x \in \operatorname{Fr}_X A \cap \operatorname{Int}_X A \Rightarrow \operatorname{Int}_X A \cap (X - A) \neq \emptyset$ assurdo.

$\boxed{\supset}$ $\forall\, x \in \operatorname{Cl}_X A - \operatorname{Int}_X A$, $\forall\, U \subset X$ intorno aperto di x in X dimostriamo $U \cap (X - A) \neq \emptyset$. Supponiamo per assurdo $U \cap (X - A) = \emptyset \Rightarrow U \subset A \Rightarrow U \subset \operatorname{Int}_X A \Rightarrow x \in \operatorname{Int}_X A$ assurdo. Quindi $x \in \operatorname{Cl}_X(X - A)$ e per ipotesi $x \in \operatorname{Cl}_X A \Rightarrow x \in \operatorname{Cl}_X A \cap \operatorname{Cl}_X(X - A) = \operatorname{Fr}_X A$. $\square$