Sottospazi topologici

Teor. *Sia X uno spazio topologico e $Y \subset X$ un sottoinsieme. Allora la famiglia*

$$\mathcal{T}_Y \overset{\text{def}}{=} \{U \cap Y \mid U \subset X \text{ aperto}\}$$

è una topologia su Y detta topologia indotta da X o topologia relativa o anche topologia di sottospazio.

Dim. Dimostriamo che valgono le proprietà della definizione di topologia.

(1) $\emptyset = \emptyset \cap Y \in \mathcal{T}_Y$.

(2) $Y = X \cap Y \in \mathcal{T}_Y$.

(3) $\forall \{V_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathcal{T}_Y \; \exists \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ aperti di X t.c. $V_\alpha = U_\alpha \cap Y \; \forall \alpha \in A \Rightarrow$

$$\bigcup_{\alpha\in A} V_\alpha = \bigcup_{\alpha\in A} (U_\alpha \cap Y) = \left(\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha\right) \cap Y \in \mathcal{T}_Y.$$

(4) $\forall V_1, V_2 \in \mathcal{T}_Y \; \exists U_1, U_2$ aperti in X t.c. $V_1 = U_1 \cap Y$ e $V_2 = U_2 \cap Y \Rightarrow$ $V_1 \cap V_2 = (U_1 \cap U_2) \cap Y \in \mathcal{T}_Y$. □

Def. $Y \subset X$ con la topologia relativa è detto *sottospazio topologico*.

Oss.

(1) Qualunque sottoinsieme di uno spazio topologico è un sottospazio topologico con la topologia relativa.

(2) Un sottospazio topologico $Y \subset X$ è a sua volta uno spazio topologico.

(3) $V \subset Y$ aperto in $Y \Leftrightarrow \exists\, U \subset X$ aperto in X t.c. $V = U \cap Y$.

(4) $C \subset Y$ chiuso in $Y \Leftrightarrow \exists\, A \subset X$ chiuso in X t.c. $C = A \cap Y$.

(5) I sottoinsiemi di uno spazio topologico saranno sempre considerati con la topologia relativa, se non specificato diversamente.

Esempi. $I := [0, 1] \subset \mathbb{R}$ è un importante sottospazio topologico e lo consideriamo con la topologia Euclidea indotta da $\mathbb{R}$.
$\mathbb{R}_+ := [0, +\infty[\subset \mathbb{R}$ è un altro esempio interessante.

Prop. *$Y \subset X$ sottospazio topologico e $\mathcal{B}$ base per $X \Rightarrow$*

$$\mathcal{B}_Y \overset{\text{def}}{=} \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$$

base per Y.

Dim. Esercizio (usare le definizioni di topologia relativa e di base).

Prop. *$Y \subset X$ sottospazio, $y \in Y$ e $\mathcal{J}_y$ base di intorni di y in $X \Rightarrow$*

$$\mathcal{J}_{Y,y} \overset{\text{def}}{=} \{J \cap Y \mid J \in \mathcal{J}_y\}$$

base di intorni di y in Y.

Dim. Esercizio (usare le definizioni).

Spazi metrici

Def. Sia X un insieme non vuoto. Una funzione $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ è detta *metrica* o *distanza* su X se valgono le seguenti proprietà $\forall\, x, y, z \in X$:

(*1*) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(*2*) $d(x, y) = d(y, x)$

(*3*) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ (*disuguaglianza triangolare*).

Oss. $d \geqslant 0$ infatti $\forall\, x, y \in X$ si ha

$$0 = d(x, x) \leqslant d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y).$$

Def. Uno *spazio metrico* (X, d) è un insieme non vuoto X munito di una metrica d su X.

Esempio. Per ogni insieme non vuoto X consideriamo la *metrica discreta*

$$d_{\text{dis}}\colon X \times X \to \mathbb{R}$$

$$d_{\text{dis}}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

(X, d_{dis}) è detto *spazio metrico discreto*.

Esempio. *Metrica Euclidea* su $\mathbb{R}$: $d(x, y) = |x - y|$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

Def. (X, d) spazio metrico, $x \in X$, $r > 0$. Il sottoinsieme

$$B_d(x, r) := \{y \in X \mid d(x, y) < r\} \subset X$$

è detto *boccia aperta di centro x e raggio r*.

$$\bar{B}_d(x, r) := \{y \in X \mid d(x, y) \leqslant r\} \subset X$$

è detto *boccia chiusa di centro x e raggio r*.

Oss. $x \in B_d(x, r) \subset \bar{B}_d(x, r)$.

Teor. (X, d) *spazio metrico* $\Rightarrow$

$$\mathcal{B}_d := \{B_d(x, r) \mid x \in X, r > 0\}$$

base per una topologia $\mathcal{T}_d$ su X (topologia indotta da d o top. metrica).

Dim. Oss. precedente $\Rightarrow \bigcup_{x,r} B(x, r) = X$ (proprietà (*1*) delle basi).

$\forall\, x_1, x_2 \in X\ \forall\, r_1, r_2 > 0\ \forall\, y \in B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2) \rightsquigarrow$

$$r := \min(r_1 - d(x_1, y), r_2 - d(x_2, y)) > 0$$

$\forall\, z \in B(y, r) \Rightarrow d(x_1, z) \leqslant d(x_1, y) + d(y, z) < d(x_1, y) + r \leqslant r_1 \Rightarrow z \in B(x_1, r_1)$ e similmente $z \in B(x_2, r_2) \Rightarrow$

$$y \in B(y, r) \subset B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2) \quad \text{(proprietà (2) delle basi).} \quad \square$$

Oss. $U \in \mathcal{T}_d \Leftrightarrow \forall\, x \in U\ \exists\, r > 0$ t.c. $B_d(x, r) \subset U$.

Def. Uno spazio topologico $(X, \mathcal{T})$ è detto *spazio metrizzabile* se esiste una metrica d su X che induce la topologia di X, ossia $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.

Esempio. Gli intervalli aperti limitati di $\mathbb{R}$ sono le bocce aperte rispetto alla metrica Euclidea $\Rightarrow \mathbb{R}$ metrizzabile.

Oss. X_{dis} metrizzabile perché $B_{d_{\text{dis}}}(x, 1) = \{x\}$, $\forall\, x \in X$.

Oss. X_{ban} non metrizzabile se $|X| \geqslant 2$.

Spazi Euclidei. Su $\mathbb{R}^n$ consideriamo la *metrica Euclidea*

$$d(x, y) = \|x - y\| = \left(\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

per ogni $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Ricordiamo che la disuguaglianza triangolare consegue dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz per il prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^n$.

Def. La topologia su $\mathbb{R}^n$ indotta dalla metrica Euclidea si chiama *topologia Euclidea*.

Oss. Consideriamo sempre $\mathbb{R}^n$ con la topologia Euclidea, se non specificato diversamente.

In modo simile si definisce la topologia Euclidea su $\mathbb{C}^n$ come quella indotta dalla metrica Euclidea

$$d(x, y) = \|x - y\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

per ogni $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n$.

Prop. *Sia (X, d) spazio metrico e $Y \subset X$ sottospazio topologico. Allora la restrizione $d_Y = d|_{Y \times Y} : Y \times Y \to \mathbb{R}$ è una metrica su Y che induce la topologia di sottospazio.*

Dim. Che d_Y sia una metrica segue subito dal fatto che lo è d.

Che la topologia indotta su Y da d_Y sia la topologia di sottospazio segue subito dall'uguaglianza

$$B_{d_Y}(y, r) = B_d(y, r) \cap Y,$$

$\forall\, y \in Y$ e $\forall\, r > 0$, che è di immediata verifica. $\square$

Cor. *X spazio metrizzabile e $Y \subset X$ sottospazio $\Rightarrow Y$ metrizzabile.*

Sottospazi notevoli di $\mathbb{R}^n$

$B^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant 1\} \subset \mathbb{R}^n$ *disco* o *boccia n-dimensionale*.
$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *sfera* o *ipersfera n-dimensionale*.
$I := [0, 1] \subset \mathbb{R}$ *intervallo (chiuso)*.
$\mathbb{R}_+ := [0, +\infty[\subset \mathbb{R}$ *semiretta (chiusa)*.

Oss. $S^n \subset B^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.
$B^0 = \{0\}$.
$B^1 = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$.
B^2 è il disco chiuso unitario in $\mathbb{R}^2$.
B^3 è la boccia chiusa unitaria in $\mathbb{R}^3$.
$S^0 = \{-1, 1\} \subset \mathbb{R}$ è uno spazio discreto con due punti.
$S^1 \subset \mathbb{R}^2$ è la circonferenza unitaria.
$S^2 \subset \mathbb{R}^3$ è la sfera unitaria.

Oss. I, $\mathbb{R}_+$, S^n, B^n sono metrizzabili con la metrica Euclidea.