Applicazioni continue

Def. Siano X e Y spazi topologici. Un'applicazione $f: X \to Y$ è *continua* se $\forall V \subset Y$ aperto in Y si ha $f^{-1}(V) \subset X$ aperto in X.

In altre parole $f: X \to Y$ è continua $\Leftrightarrow$ le preimmagini tramite f degli aperti sono aperti.

Oss. $f^{-1}(Y - V) = X - f^{-1}(V)$. Quindi $f: X \to Y$ continua $\Leftrightarrow$
$\forall C \subset Y$ chiuso in Y si ha $f^{-1}(C) \subset X$ chiuso in X.

Prop. *$f: X \to Y$ e $g: Y \to Z$ continue $\Rightarrow$ $g \circ f: X \to Z$ continua.*

Dim. Segue subito dal fatto che $(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))\ \forall V \subset Z$. $\square$

Oss. $c: X \to Y$ costante $\Rightarrow$ c continua.
$\mathrm{id}_X : X \to X$ continua per ogni spazio topologico X.
$Y \subset X$ sottospazio top. $\Rightarrow$ mappa d'inclusione $i_Y : Y \hookrightarrow X$ continua.
Restrizioni di applicazioni continue a sottospazi del dominio o del codominio sono continue.
$\forall\ f: X_{\text{dis}} \to Y$ è continua.
$\forall\ f: X \to Y_{\text{ban}}$ è continua.

Def. $f: X \to Y$ è *aperta* se $\forall U \subset X$ aperto in X si ha $f(U)$ aperto in Y.
$f: X \to Y$ è *chiusa* se $\forall C \subset X$ chiuso in X si ha $f(C)$ chiuso in Y.

$f: X \to Y$ aperta $\Leftrightarrow$ f manda aperti in aperti.
$f: X \to Y$ chiusa $\Leftrightarrow$ f manda chiusi in chiusi.

Oss. Una costante $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua e chiusa, ma non aperta.
$f: X \to Y$ aperta $\Rightarrow$ $f(X) \subset Y$ aperto.
$f: X \to Y$ chiusa $\Rightarrow$ $f(X) \subset Y$ chiuso.
$A \subset X$ aperto (risp. chiuso) $\Leftrightarrow$ inclusione $i_A : A \hookrightarrow X$ aperta (risp. chiusa).

Esempio. $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}_{\text{dis}} \to \mathbb{R}$ continua e biiettiva ma l'inversa non è continua.

Def. Siano X e Y spazi topologici. Un'applicazione $f: X \to Y$ è detta *omeomorfismo* se valgono le seguenti:

(1) f è biiettiva

(2) f è continua

(3) f^{-1} è continua.

Diciamo che X e Y sono *omeomorfi* se esiste un omeomorfismo $f: X \to Y$ e in tal caso scriviamo $X \cong Y$.

N. B. Gli omeomorfismi si chiamano anche applicazioni *bicontinue*.

Oss. $\mathrm{id}_X : X \to X$ omeomorfismo per ogni spazio X (stessa topologia).
$f: X \to Y$ omeomorfismo $\Rightarrow$ $f^{-1}: Y \to X$ omeomorfismo.
$f: X \to Y$ e $g: Y \to Z$ omeomorfismi $\Rightarrow$ $g \circ f: X \to Z$ omeomorfismo.
L'omeomorfismo è una *relazione d'equivalenza* tra spazi topologici.

Oss. Data $f: X \to Y$ biiettiva, si ha f^{-1} continua $\Leftrightarrow$ f aperta $\Leftrightarrow$ f chiusa (attenzione, serve biiettiva).
$f: X \to Y$ omeo $\Leftrightarrow$ f continua, biiettiva e aperta (o chiusa).

Cor. *Per ogni spazio X l'insieme*

$$\text{Omeo}(X) \overset{\text{def}}{=} \{f : X \to X \mid f \text{ omeo}\}$$

è un gruppo rispetto a composizione, detto gruppo degli omeomorfismi.

N. B. In generale Omeo(X) è un gruppo molto grande e molto complicato, quasi mai abeliano (a parte alcuni casi banali).

Def. Una proprietà $\mathcal{P}$ è detta *proprietà topologica* se $\forall X, Y$ spazi topologici, X ha $\mathcal{P}$ e $Y \cong X \Rightarrow Y$ ha $\mathcal{P}$.

In altre parole $\mathcal{P}$ è una proprietà topologica se valendo per uno spazio X vale anche per tutti gli spazi omeomorfi a X, ovvero $\mathcal{P}$ è *invariante* a meno di omeomorfismi. Studieremo in seguito importanti proprietà topologiche.
La *Topologia* studia le proprietà topologiche degli spazi. Un problema fondamentale è capire se due spazi topologici X e Y sono omeomorfi.

Prop. *La metrizzabilità è una proprietà topologica.*

Dim. Diamo solo un'idea, lasciando i dettagli per Esercizio.
X metrizzabile e $Y \cong X \Rightarrow \exists\, d_X$ metrica su X che ne induce la topologia e $\exists\, f : Y \to X$ omeo $\rightsquigarrow$

$$d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}$$
$$d_Y(y_1, y_2) = d_X(f(y_1), f(y_2))$$

metrica su Y che induce la topologia di Y. □

Def. Dati gli spazi X e Y definiamo l'insieme delle applicazioni continue

$$C(X, Y) \overset{\text{def}}{=} \{f : X \to Y \mid f \text{ continua}\}.$$

Oss. $C(X, Y) \neq \emptyset$ (contiene almeno le costanti).
Omeo(X) $\subset C(X, X)$.

Prop. *$f : X \to Y$ è continua $\Leftrightarrow \forall x \in X$, $\forall V \subset Y$ intorno di $f(x) \in Y$, $\exists\, U \subset X$ intorno di x in X t.c. $f(U) \subset V$.*

Dim. Non è restrittivo limitarci a considerare solo intorni aperti.
$\boxed{\Rightarrow}$ $\forall V \subset Y$ intorno aperto di $f(x) \Rightarrow x \in U := f^{-1}(V) \subset X$ aperto.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\forall V \subset Y$ aperto, se $f^{-1}(V) = \emptyset$ allora è aperto.
Se $f^{-1}(V) \neq \emptyset$, $\forall x \in f^{-1}(V) \Rightarrow V$ intorno di $f(x)$ in $Y \Rightarrow \exists\, U \subset X$ intorno di x t.c. $f(U) \subset V \Rightarrow x \in U \subset f^{-1}(V) \Rightarrow f^{-1}(V)$ aperto in $X \Rightarrow$ f continua. □

Oss. Nella Prop. possiamo limitarci a considerare intorni U e V aperti e/o basici (se abbiamo preventivamente fissato basi di intorni in X e Y). La dimostrazione richiede solo piccole modifiche.

Continuità negli spazi metrici

Cor. *Siano* (X, d_X) *e* (Y, d_Y) *spazi metrici. Allora* $f : X \to Y$ *è continua* $\Leftrightarrow \forall\, x_0 \in X$, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ *t.c.* $\forall\, x \in X$ *si abbia che*

$$d_X(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Dim. Segue subito dalla Prop. e dall'Oss. usando come intorni basici le bocce aperte $V = B_{d_Y}(f(x), \varepsilon)$ e $U = B_{d_X}(x_0, \delta)$. □

Oss. In generale δ dipende da x_0 e da ε.
La definizione di funzione continua generalizza quella studiata in Analisi. Le funzioni reali di variabili reali la cui continuità è nota dall'Analisi saranno considerate continue senza bisogno di dimostrazione.

Oss. *Applicazioni affini reali* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f(x) = Ax + b$ con $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e $b \in \mathbb{R}^m$, sono continue.
Idem per *applicazioni affini complesse* $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$.
Affinità reali $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = Ax + b$ con $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ e $b \in \mathbb{R}^n$, sono omeomorfismi (l'inversa è anch'essa affinità quindi continua).
Idem per *affinità complesse* $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$.
In particolare, per $b = 0$, le applicazioni lineari $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sono continue e gli automorfismi lineari $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sono omeomorfismi (idem su $\mathbb{C}$).

Esempio. $\exp : \mathbb{R} \to\,]0, +\infty[$, $\exp(x) = e^x$ è continua e infatti è omeo con inversa $\log :]0, +\infty[\, \to \mathbb{R}$, pure essa continua $\Rightarrow \mathbb{R} \cong\,]0, +\infty[$.
$g :]0, 1[\, \to\,]0, +\infty[$, $g(x) = \dfrac{x}{1 - x}$ omeo con inversa $g^{-1}(y) = \dfrac{y}{1 + y}$.

$$]0, 1[\; \cong\;]a, b[\; \cong\;]a, +\infty[\; \cong\;]-\infty, a[\; \cong \mathbb{R}.$$

$$[0, 1[\; \cong [a, b[\; \cong\;]a, b] \cong [0, +\infty[\; \cong [a, +\infty[\; \cong\;]-\infty, a].$$

$$[0, 1] \cong [a, b] \quad \text{ma} \quad [0, 1] \ncong \mathbb{R} \quad \text{(lo vedremo più avanti).}$$

Chiusura e frontiera negli spazi metrici

Def. Dato (X, d) spazio metrico, $\forall x \in X$ e $\forall A, B \subset X$ non vuoti, definiamo la distanza tra x e A

$$d(x, A) := \inf\{d(x, a) \mid a \in A\} \geqslant 0$$

e la distanza tra A e B

$$d(A, B) := \inf\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\} \geqslant 0.$$

Oss. $x \in A \not\Leftarrow\!\!\Rightarrow d(x, A) = 0$.
$A \cap B \neq \emptyset \not\Leftarrow\!\!\Rightarrow d(A, B) = 0$.
L'inf non è necessariamente un minimo.

Esempio. In $\mathbb{R}$ con la distanza Euclidea $d(0,]0, 1[) = 0$.

Prop. (X, d) *spazio metrico,* $\emptyset \neq A \subset X \Rightarrow$

$$d_A : X \to \mathbb{R}$$
$$d_A(x) = d(x, A)$$

funzione continua.

Oss. In altre parole la distanza da un sottoinsieme è continua.

Dim. $\forall x_0, x \in X$, $\forall a \in A$ per la disuguaglianza triangolare e passando all'inf si ha

$$d(x, a) \leqslant d(x, x_0) + d(x_0, a) \;\Rightarrow\; d_A(x) - d_A(x_0) \leqslant d(x, x_0)$$

da cui scambiando x con x_0 si deduce

$$|d_A(x) - d_A(x_0)| \leqslant d(x, x_0).$$

Si ottiene quindi la continuità ponendo $\delta = \varepsilon$. □

Oss. $f : X \to \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow$ i sottoinsiemi di X definiti da un'equazione continua $f(x) = \alpha$, o da una disequazione $f(x) \geqslant \alpha$ o $f(x) \leqslant \alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, sono chiusi in X in quanto preimmagini di chiusi.
Analogamente i sottoinsiemi di X definiti da $f(x) > \alpha$ o da $f(x) < \alpha$ o da $f(x) \neq \alpha$ sono aperti in X.

Prop. *Siano* (X, d) *uno spazio metrico e* $\emptyset \neq A \subset X$*. Allora*

$$\mathrm{Cl}_X\, A = \{x \in X \mid d(x, A) = 0\}.$$

Dim. Poniamo $C = \{x \in X \mid d(x, A) = 0\}$ e dimostriamo $\mathrm{Cl}_X\, A = C$.
$\boxed{\subset}$ C chiuso in X perché definito da un'equazione continua.
$A \subset C \Rightarrow \mathrm{Cl}_X\, A \subset C$.
$\boxed{\supset}$ $\forall x \in C$, $\forall r > 0\ \exists a \in A$ t.c. $d(x, a) < r \Rightarrow B_d(x, r) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in \mathrm{Cl}_X\, A$. □

Cor. $\forall x \in X$ *si ha* $x \in \mathrm{Cl}_X\, A \Leftrightarrow d(x, A) = 0$.

Cor. $\forall x \in X$ *si ha* $x \in \mathrm{Fr}_X\, A \Leftrightarrow d(x, A) = d(x, X - A) = 0$.

Cor. $A \subset X$ *chiuso,* $x \in X$ *e* $d(x, A) = 0 \Rightarrow x \in A$.

N. B. $\emptyset \neq A, B \subset X$ chiusi e $d(A, B) = 0 \not\Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$.