Spazi vettoriali normati

Def. Sia V uno spazio vettoriale reale o complesso. Una funzione
$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$$
è detta *norma* su V se valgono le seguenti $\forall\, v, w \in V$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$:

(1) $\|v\| = 0 \Rightarrow v = 0_V$

(2) $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$

(3) $\|v + w\| \leqslant \|v\| + \|w\|$ (disuguaglianza triangolare per la norma).

Uno *spazio vettoriale normato* $(V, \|\cdot\|)$ è uno spazio vettoriale reale o complesso V munito di una norma.

Oss. $\|0_V\| = \|0\, 0_V\| = 0\|0_V\| = 0$.
$0 = \|0_V\| = \|v - v\| \leqslant \|v\| + \|-v\| = 2\|v\|$, $\forall\, v \in V \Rightarrow \|\cdot\| \geqslant 0$.

Prop. *Sia V uno spazio vettoriale normato. Allora la funzione*
$$d : V \times V \to \mathbb{R}$$
$$d(v, w) = \|v - w\|$$
è una metrica su V. Pertanto V è anche uno spazio metrico e quindi uno spazio topologico.

Dim. Esercizio.

Oss. Si ha: $\big|\|v\| - \|w\|\big| \leqslant \|v - w\| \Rightarrow \|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ continua. Esercizio.

Def. Due metriche d_1 e d_2 su X sono *equivalenti* se $\exists\, C_1, C_2 > 0$ t.c.
$$C_1 d_1(x, y) \leqslant d_2(x, y) \leqslant C_2 d_1(x, y), \quad \forall\, x, y \in X.$$

Due norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ su V sono *equivalenti* se $\exists\, C_1, C_2 > 0$ t.c.
$$C_1\|v\|_1 \leqslant \|v\|_2 \leqslant C_2\|v\|_1, \quad \forall\, v \in V.$$

Oss. Sono due relazioni d'equivalenza.
Norme equivalenti su V inducono metriche equivalenti. Esercizio.

Prop. *Metriche equivalenti su un insieme X inducono la stessa topologia.*

Dim. $d_1, d_2 : X \times X \to \mathbb{R}$ metriche equivalenti $\rightsquigarrow C_1, C_2 > 0$ t.c.
$$C_1 d_1 \leqslant d_2 \leqslant C_2 d_1 \;\Rightarrow\; B_{d_1}(x, C_2^{-1} r) \subset B_{d_2}(x, r) \subset B_{d_1}(x, C_1^{-1} r). \qquad \square$$

Esempio. $\forall\, x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$, definiamo:

$$\|x\|_1 := |x_1| + \cdots + |x_n|;$$
$$\|x\|_\infty := \max(|x_1|, \ldots, |x_n|).$$

Sono equivalenti tra loro e alla norma Euclidea $\|\cdot\|$:
$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant n\|x\|_\infty, \quad \|x\|_\infty \leqslant \|x\| \leqslant \sqrt{n}\,\|x\|_\infty.$$
Pertanto su $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ potremo usare indifferentemente una di queste norme per rappresentare la topologia Euclidea.

Esempio. Su $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ si considera anche la p-*norma* (o *norma* ℓ^p), $\forall\, p \geqslant 1$:

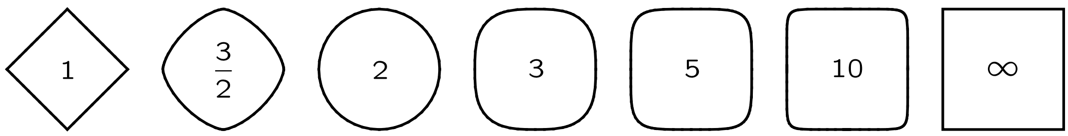
$$\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si ha subito la disuguaglianza

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p \leqslant n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty$$

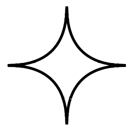
da cui per il Teorema dei due carabinieri

$$\lim_{p\to+\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$



Sfere unitarie $\|x\|_p = 1$ in $\mathbb{R}^2$ per alcuni valori di $p \geqslant 1$.

Oss. $\|\cdot\|_p$ non soddisfa la disuguaglianza triangolare $\forall\, p \in\,]0,1[$.



Enunciamo senza dimostrare il teorema seguente.

Teor. $\dim V < \infty \Rightarrow$ *tutte le norme su V sono tra loro equivalenti.*

N. B. $\dim V = \infty \Rightarrow$ esistono norme non equivalenti su V.

Lavoro di gruppo. (*a*) $B^2 \cong [-1,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$. (*b*) $\mathrm{Fr}_{\mathbb{R}^2} B^2 = S^1$.

Immersioni, immersioni locali e omeo locali

Def. Un'applicazione tra spazi topologici $f: X \to Y$ è detta

(1) *immersione* se $f|_{f(X)}: X \to f(X)$ omeo, dove $f(X) \subset Y$ ha la top. di sottospazio. Scriviamo $f: X \hookrightarrow Y$ e diciamo X *si immerge* in Y.

(2) *immersione locale* se $\forall\, x \in X$, $\exists\, U \subset X$ intorno di x t.c. $f|_U: U \to Y$ è un'immersione. Diciamo che X si *immerge localmente* in Y.

(3) *omeomorfismo locale* se $\forall\, x \in X$, $\exists\, U \subset X$ intorno di x t.c. $f(U) \subset Y$ intorno di $f(x)$ e $f_{|U}: U \to f(U)$ omeo.

N. B. In inglese: immersione = *embedding*; immersione loc. = *immersion*.

Oss. $X \subset Y$ sottospazio topologico $\Leftrightarrow i_X : X \hookrightarrow Y$ immersione.

Oss. $f: X \hookrightarrow Y$ immersione $\not\Leftarrow\Rightarrow$ f continua e iniettiva.
$X \hookrightarrow Y \Leftrightarrow X$ omeomorfo ad un sottospazio di Y e a meno di immersione possiamo considerare $X \subset Y$.
$f: X \to Y$ immersione loc. $\not\Leftarrow\Rightarrow$ f continua e loc. iniettiva
($\forall\, x \in X$, $\exists\, U \subset X$ intorno di x t.c. $f_{|U}: U \to Y$ iniettiva).
Immersione $\not\Leftarrow\Rightarrow$ immersione loc.
$f: X \to Y$ omeo loc. $\Leftrightarrow f: X \to Y$ immersione loc. aperta.

Esempio. $\forall\, k < n$ consideriamo le *immersioni canoniche*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^k &\hookrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto (x, 0_{\mathbb{R}^{n-k}}) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \mathbb{C}^k &\hookrightarrow \mathbb{C}^n \\ x &\mapsto (x, 0_{\mathbb{C}^{n-k}}). \end{aligned}$$

Abbiamo anche: $B^k \hookrightarrow B^n$, $S^k \hookrightarrow S^n$.
Possiamo considerare $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^k \subset \mathbb{C}^n$, $S^k \subset S^n$, $B^k \subset B^n$, $\forall\, k < n$.
Queste immersioni sono chiuse.

Lavoro di gruppo. $f: [0, 2\pi[\, \to S^1$, $f(t) = (\cos t, \sin t)$ omeo?