Unione topologica

Unione disgiunta di insiemi. L'*unione disgiunta* di due insiemi X e Y è

$$X \sqcup Y \stackrel{\text{def}}{=} (X \times \{1\}) \cup (Y \times \{2\}).$$

Più in generale l'*unione disgiunta* di una famiglia di insiemi $\{X_i\}_{i \in I}$ è

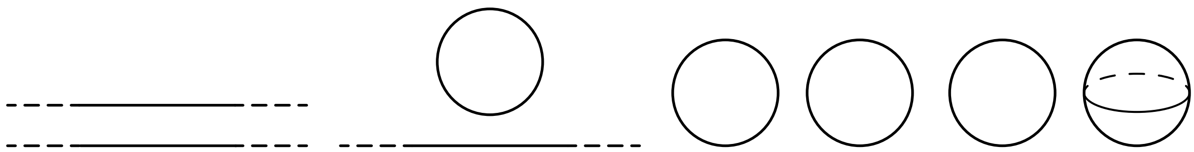
$$\bigsqcup_{i \in I} X_i \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i \in I} (X_i \times \{i\}).$$

Pertanto l'unione disgiunta di insiemi non necessariamente disgiunti è l'unione di loro copie disgiunte ottenute identificando X_i con $X_i \times \{i\}$ $\forall\, i \in I$. L'unione disgiunta di insiemi a due a due disgiunti si identifica con l'unione.

Unione topologica di spazi. L'*unione topologica* di due spazi X e Y è l'unione disgiunta $X \sqcup Y$ con la *topologia unione*

$$\mathcal{T}_\sqcup \stackrel{\text{def}}{=} \{U \sqcup V \mid U \subset X \text{ e } V \subset Y \text{ aperti}\}.$$

Oss. $W \subset X \sqcup Y$ aperto $\Leftrightarrow$ $W \cap X$ e $W \cap Y$ aperti.
X e Y sottospazi aperti e chiusi di $X \sqcup Y$.



$\mathbf{R} \sqcup \mathbf{R}$ $\mathbf{R} \sqcup S^1$ $S^1 \sqcup S^1$ $S^1 \sqcup S^2$

Def. L'*unione topologica* di una famiglia di spazi $\{X_i\}_{i \in I}$ è l'unione disgiunta $\bigsqcup_{i \in I} X_i$ con la *topologia unione*

$$\mathcal{T}_\sqcup \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \bigsqcup_{i \in I} U_i \mid U_i \subset X_i \text{ aperto } \forall\, i \in I \right\}.$$

Oss. Si verifica facilmente che questa è una topologia.
$W \subset \bigsqcup_{i \in I} X_i$ aperto $\Leftrightarrow$ $W \cap X_i$ aperto in X_i $\forall\, i \in I$.
$X_j \subset \bigsqcup_{i \in I} X_i$ sottospazio aperto e chiuso $\forall\, j \in I$.

Definiamo le *immersioni canoniche* $\forall\, j \in I$

$$i_j : X_j \hookrightarrow \bigsqcup_{i \in I} X_i$$
$$i_j(x) = x, \quad \forall\, x \in X_j$$

Oss. i_j immersione aperta e chiusa $\forall\, j \in I$.
$i_j^{-1}(W) = W \cap X_j$, $\forall\, W \subset \bigsqcup_{i \in I} X_i$.

Teor. $f : \bigsqcup_{i \in I} X_i \to Y$ *continua* $\Leftrightarrow$ $f_j := f \circ i_j : X_j \to Y$ *continua* $\forall\, j \in I$.

Def. $f_j = f \circ i_j = f|_{X_j} : X_j \to Y$ è detta j*-esima restrizione* di f.

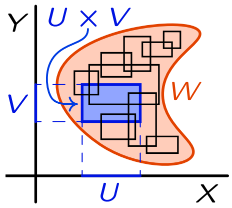
Oss. Si ha $f(x) = f_j(x)$, $\forall\, x \in X_j$, $\forall\, j \in I$.

Dim. Basta osservare che $f^{-1}(V) = \bigsqcup_{i \in I} f_i^{-1}(V)$, $\forall\, V \subset Y$ aperto. □

Prodotto topologico

Prodotti topologici finiti. Il *prodotto topologico* di due spazi X e Y è il prodotto cartesiano $X \times Y$ con la *topologia prodotto* avente come base

$$\mathcal{B}_\times \overset{\text{def}}{=} \{U \times V \mid U \subset X \text{ e } V \subset Y \text{ aperti}\}.$$



Gli aperti di $X \times Y$ sono unioni di prodotti di aperti, e in generale sono più complicati dei prodotti di aperti.

In generale, il *prodotto topologico* di $X_1, \dots, X_n$ è il prodotto cartesiano

$$X = X_1 \times \cdots \times X_n$$

con la *topologia prodotto* avente per base la famiglia dei prodotti di aperti

$$\mathcal{B}_\times \overset{\text{def}}{=} \{U_1 \times \cdots \times U_n \mid U_i \subset X_i \text{ aperto } \forall\, i = 1, \dots, n\}.$$

Verifichiamo che $\mathcal{B}_\times$ è base per una topologia su $X_1 \times \cdots \times X_n$.

(1) $X_1 \times \cdots \times X_n \in \mathcal{B}_\times$. $\forall\, U_1 \times \cdots \times U_n,\ V_1 \times \cdots \times V_n \in \mathcal{B}_\times$ si ha

(2) $(U_1 \times \cdots \times U_n) \cap (V_1 \times \cdots \times V_n) = (U_1 \cap V_1) \times \cdots \times (U_n \cap V_n) \in \mathcal{B}_\times$.

Proiezioni canoniche. Definiamo le *proiezioni canoniche* $\forall\, j = 1, \dots, n$

$$\pi_j : X_1 \times \cdots \times X_n \to X_j$$
$$\pi_j(x_1, \dots, x_n) = x_j$$

Oss. π_j continua, suriettiva e aperta $\forall\, j = 1, \dots, n$, infatti si ha:
$\pi_j^{-1}(U_j) = X_1 \times \cdots \times U_j \times \cdots \times X_n$, $\pi_j(U_1 \times \cdots \times U_n) = U_j$, $\forall\, U_j \subset X_j$.

Teor. *$f : Y \to X_1 \times \cdots \times X_n$ continua $\Leftrightarrow$ $f_j := \pi_j \circ f : Y \to X_j$ continua $\forall\, j = 1, \dots, n$.*

Def. $f_j = \pi_j \circ f : Y \to X_j$ è detta *j-esima componente* di f.

Oss. Si ha $f(y) = (f_1(y), \dots, f_n(y))$ e scriviamo $f = (f_1, \dots, f_n)$.

Dim. $\boxed{\Rightarrow}$ f_j è composizione di applicazioni continue quindi è continua.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\forall\, U_1 \times \cdots \times U_n \subset X_1 \times \cdots \times X_n$ prodotto di aperti (aperto basico) $\Rightarrow$

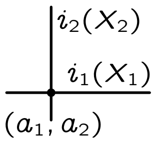
$$f^{-1}(U_1 \times \cdots \times U_n) = f_1^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap f_n^{-1}(U_n). \qquad \square$$

Oss. $A_j \subset X_j$ chiuso $\forall\, j = 1, \dots, n \Rightarrow A_1 \times \cdots \times A_n$ chiuso. Infatti:

$$(X_1 \times \cdots \times X_n) - (A_1 \times \cdots \times A_n) = \bigcup_{j=1}^{n} (X_1 \times \cdots \times (X_j - A_j) \times \cdots \times X_n).$$

Immersioni canoniche. $\forall\, j = 1, \dots, n$ scegliamo un punto $a_j \in X_j \rightsquigarrow$

$$i_j : X_j \hookrightarrow X_1 \times \cdots \times X_n$$
$$i_j(x_j) = (a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_n)$$



Oss. $i_j(X_j) = \{a_1\} \times \cdots \times \{a_{j-1}\} \times X_j \times \{a_{j+1}\} \times \cdots \times \{a_n\}$.

Prop. *i_j è un'immersione $\forall\, j = 1, \ldots, n$.*

Dim. $\pi_j \circ i_j = \mathrm{id}_{X_j}$ e $\pi_i \circ i_j = a_i = \text{cost}$ per $i \neq j \Rightarrow i_j$ continua e iniettiva. $i_j(U_j) = (X_1 \times \cdots \times U_j \times \cdots \times X_n) \cap i_j(X_j) \Rightarrow i_j| : X_j \to i_j(X_j)$ aperta. $\square$

Oss. $\mathcal{B}_i$ base per X_i, $\forall\, i = 1, \ldots, n \Rightarrow$

$$\mathcal{B} = \{B_1 \times \cdots \times B_n \mid B_i \in \mathcal{B}_i, \forall\, i = 1, \ldots, n\}$$

base per $X_1 \times \cdots \times X_n$.

Teor. *$X_1 \ldots, X_n$ metrizzabili $\Rightarrow X_1 \times \cdots \times X_n$ metrizzabile.*

Dim. $d_1, \ldots, d_n$ distanze su $X_1 \ldots, X_n$ risp. $\rightsquigarrow$

$$d \colon (X_1 \times \cdots \times X_n) \times (X_1 \times \cdots \times X_n) \to \mathbb{R} \quad \textit{(distanza prodotto)}$$

$$d((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \max(d_1(x_1, y_1), \ldots, d_n(x_n, y_n)).$$

$$B_d((x_1, \ldots, x_n), r) = B_{d_1}(x_1, r) \times \cdots \times B_{d_n}(x_n, r)$$

e la tesi segue dall'osservazione che i prodotti di bocce aperte dello stesso raggio sono base per $X_1 \times \cdots \times X_n$. $\square$

Cor. *$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}}$ e $\mathbb{C}^n = \underbrace{\mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}}_{n \text{ volte}}$ sono prodotti topologici.*

Dim. Top. prodotto = top. Euclidea perché entrambe indotte da $\|\cdot\|_\infty$. $\square$

Oss. $f : Y \to \mathbb{R}^n$ è continua $\Leftrightarrow$ tutte le componenti sono continue.

Def. $T^n \overset{\text{def}}{=} \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n \text{ volte}}$ è detto *n-toro* o *toro n-dimensionale*.

$I^n \overset{\text{def}}{=} \underbrace{I \times \cdots \times I}_{n \text{ volte}}$ è detto *ipercubo* o *cubo n-dimensionale*.

$T^1 = S^1$, $T^2 = S^1 \times S^1$, $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$.
$I^1 = I = [0, 1]$ (intervallo), $I^2 = I \times I$ (quadrato), $I^3 = I \times I \times I$ (cubo).

Oss. $I^n \cong B^n \Rightarrow B^m \times B^n \cong B^{m+n}$, $\forall\, m, n \geqslant 0$.

N.B. $S^m \times S^n \ncong S^{m+n}$ (lo dimostreremo più avanti per $m \leqslant 1$).

Prodotti topologici arbitrari

Prodotti arbitrari di insiemi. Dati gli insiemi $X_1, \dots, X_n$, una n-upla

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n$$

è essenzialmente una funzione

$$\begin{aligned} x\colon \{1, \dots, n\} &\to X_1 \cup \cdots \cup X_n \\ \text{t.c.} \quad x(i) &= x_i \in X_i, \quad \forall\, i \in \{1, \dots, n\} \end{aligned}$$

e quindi il prodotto cartesiano è l'insieme di tutte le funzioni di questo tipo. Questa considerazione ci permette di generalizzare il prodotto cartesiano.

Def. Data una famiglia $\{X_i\}_{i\in I}$ di insiemi, il *prodotto cartesiano* è l'insieme

$$\prod_{i\in I} X_i \overset{\text{def}}{=} \left\{ x\colon I \to \bigcup_{i\in I} X_i \;\middle|\; x(i) \in X_i, \forall\, i \in I \right\}.$$

$\forall\, x \in \prod\limits_{i\in I} X_i$, $\forall\, i \in I \rightsquigarrow x_i := x(i)$ (i*-esima componente di* x).

Scriviamo anche $x = (x_i)_{i\in I}$.

Oss.

$\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$ è l'insieme delle *successioni* $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.c. $x_n \in X_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

$\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} X = X^{\mathbb{N}}$ è l'insieme delle successioni a valori in X.

$\prod\limits_{i\in I} X = X^I$ è l'insieme delle funzioni $x\colon I \to X$.

Assioma della scelta. $X_i \neq \emptyset\ \forall\, i \in I \Rightarrow \prod\limits_{i\in I} X_i \neq \emptyset$.

Oss. L'assioma dice che $\forall$ insieme I e $\forall$ famiglia di insiemi non vuoti $\{X_i\}_{i\in I}$ $\exists\, s\colon I \to \bigcup\limits_{i\in I} X_i$ t.c. $s(i) \in X_i\ \forall\, i \in I$ (*funzione di scelta*).

Prodotti topologici arbitrari. Il *prodotto topologico* di una famiglia di spazi $\{X_i\}_{i\in I}$ è il prodotto cartesiano $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$ con la *topologia prodotto* avente per base la famiglia di tutti i prodotti $U = \prod\limits_{i\in I} U_i$ t.c.

$U_i \subset X_i$ aperto $\forall\, i \in I$ e $\#\{i \in I \mid U_i \subsetneq X_i\} < \infty$

N.B. Se $\# I = \infty$, la base della topologia prodotto non è formata da tutti i prodotti di aperti ma solo dai prodotti di aperti quasi tutti banali, cioè $U_i = X_i$ per ogni $i \in I$ tranne che per al più un numero finito.

N.B. La famiglia di *tutti* i prodotti di aperti è base per la *topologia box* che non studieremo. La topologia box è diversa dalla topologia prodotto nel caso di prodotti infiniti. Le due topologie coincidono per prodotti finiti.

Esempio. In $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$ gli aperti basici sono i prodotti del tipo $U = \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$ con $U_n \subset \mathbb{R}$ aperto $\forall\, n \in \mathbb{N}$ e $\exists N > 0$ t.c. $U_n = \mathbb{R}\ \forall\, n \geqslant N$.

Esempio. $[0, 1]^{\mathbb{N}} = \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} [0, 1]$ è detto *cubo di Hilbert.*