Spazio quoziente

$\sim$ Relazione d'equivalenza su un insieme X. $\forall\, x, y, z \in X$:

$x \sim x$	*Riflessiva*
$x \sim y \Rightarrow y \sim x$	*Simmetrica*
$x \sim y$ e $y \sim z \Rightarrow x \sim z$	*Transitiva*
$[x] \overset{\text{def}}{=} \{y \in X \mid y \sim x\}$	*Classe d'equivalenza di $x \in X$*
$X/\!\sim\ \overset{\text{def}}{=} \{[x] \mid x \in X\}$	*Insieme quoziente*
$\pi : X \to X/\!\sim$ $\pi(x) = [x]$	*Applicazione quoziente*

$\sim$ Relazione d'equivalenza su uno spazio topologico X.

Def. La *topologia quoziente* su $X/\!\sim$ è

$$\mathcal{T}_\sim \overset{\text{def}}{=} \{V \subset X/\!\sim\ \mid \pi^{-1}(V) \subset X \text{ aperto}\}.$$

$X/\!\sim$ con la topologia quoziente è detto *spazio quoziente*.

Oss.
$V \subset X/\!\sim$ aperto in $X/\!\sim\ \Leftrightarrow \pi^{-1}(V)$ aperto in X.
$C \subset X/\!\sim$ chiuso in $X/\!\sim\ \Leftrightarrow \pi^{-1}(C)$ chiuso in X.

Oss. $\mathcal{T}_\sim$ è una topologia perché

$$\pi^{-1}(\emptyset) = \emptyset, \quad \pi^{-1}(X/\!\sim) = X$$
$$\pi^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} V_i\right) = \bigcup_{i\in I} \pi^{-1}(V_i)$$
$$\pi^{-1}(V_1 \cap V_2) = \pi^{-1}(V_1) \cap \pi^{-1}(V_2).$$

Oss. $\pi : X \to X/\!\sim$ continua e suriettiva.

N.B. Per definire $\sim$ su X è sufficiente dichiarare equivalenze non banali.

Esempio. *Retta con due origini.* Su $\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R} = \mathbb{R} \times \{0, 1\}_{\text{dis}}$ definiamo

$$(x, 0) \sim (x, 1) \quad \forall\, x \in \mathbb{R} - \{0\} \rightsquigarrow R_\div := (\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R})/\!\sim.$$

Ogni intorno di $[(0, 0)]$ interseca ogni intorno di $[(0, 1)]$.

Teor. *$f : X/\!\sim\ \to Y$ continua $\Leftrightarrow f \circ \pi : X \to Y$ continua.*

Dim. $\boxed{\Rightarrow}$ Immediato.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\forall\, V \subset Y$ aperto $\Rightarrow \pi^{-1}(f^{-1}(V)) = (f \circ \pi)^{-1}(V) \subset X$ aperto $\Rightarrow$ $f^{-1}(V) \subset X$ aperto $\Rightarrow f$ continua. $\square$

Oss. $f : Y \to X/\!\sim$ continua *se* $\exists\, \tilde{f} : Y \to X$ continua t.c. $f = \pi \circ \tilde{f}$.

Spazi proiettivi

Caso reale. $\sim$ relazione di proporzionalità: $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$

$$x \sim y \iff \exists\, \alpha \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ t.c. } x = \alpha y$$

$\mathbb{R}\mathrm{P}^n \overset{\text{def}}{=} (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/\!\sim$	*Spazio proiettivo reale di dimensione* n. (*Retta* per $n = 1$, *piano* per $n = 2$)
$[x] = [x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n$	*Coordinate omogenee* (non tutte nulle).
$\pi : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$, $\pi(x) = [x]$	Continua e suriettiva.

Caso complesso. $\sim$ relazione di proporzionalità: $\forall\, x, y \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$

$$x \sim y \iff \exists\, \alpha \in \mathbb{C} - \{0\} \text{ t.c. } x = \alpha y$$

$\mathbb{C}\mathrm{P}^n \overset{\text{def}}{=} (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/\!\sim$	*Spazio proiettivo complesso di dimensione* n. (*Retta* per $n = 1$, *piano* per $n = 2$)
$[x] = [x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{C}\mathrm{P}^n$	*Coordinate omogenee* (non tutte nulle).
$\pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$, $\pi(x) = [x]$	Continua e suriettiva.

Proiettività. Poniamo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ a seconda del caso.

$A \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{K}) \rightsquigarrow p_A : \mathbb{K}\mathrm{P}^n \to \mathbb{K}\mathrm{P}^n$ *Proiettività.*

$$p_A([x]) = [Ax]$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^{n+1} - \{0\} \arrow[r, "L_A"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{K}^{n+1} - \{0\} \arrow[d, "\pi"] & L_A(x) = Ax \\
\mathbb{K}\mathrm{P}^n \arrow[r, "p_A"'] & \mathbb{K}\mathrm{P}^n & p_A([x]) = [Ax]
\end{tikzcd}$$

Oss. $p_A \circ \pi = \pi \circ L_A \Rightarrow p_A$ continua e $p_A^{-1} = p_{A^{-1}} \Rightarrow p_A$ omeomorfismo.