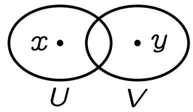
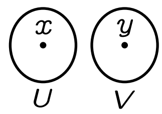
Assiomi di separazione T_1 e T_2

Def. Uno spazio topologico X è:

T_1 se $\forall\, x, y \in X$, $x \neq y \Rightarrow \exists\, U, V \subset X$ aperti t.c. $x \in U - V$ e $y \in V - U$.



T_2 o *di Hausdorff* se $\forall\, x, y \in X$, $x \neq y \Rightarrow \exists\, U, V \subset X$ aperti t.c. $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.



Oss.

(1) $\# X \geqslant 2 \Rightarrow X_{\text{ban}}$ non T_1.

(2) $\# X = \infty \Rightarrow X_{\text{cof}}$ T_1 ma non T_2.

$\boxed{T_1}$ $\forall\, x \neq y \in X_{\text{cof}} \rightsquigarrow U = X - \{y\}$, $V = X - \{x\}$.

$\boxed{\text{Non } T_2}$ $\forall\, U, V \subset X_{\text{cof}}$ aperti non vuoti $\Rightarrow \exists\, A, B \subset X$ finiti t.c. $U = X - A$, $V = X - B \Rightarrow U \cap V = X - (A \cup B) \neq \emptyset$.

(3) X_{dis} T_2 $\forall\, X$.

Oss. $T_2 \not\Leftarrow\Rightarrow T_1$.

Oss. Metrizzabile $\Rightarrow T_2$. $\forall\, x \neq y \in (X, d) \rightsquigarrow r = \dfrac{d(x, y)}{2} > 0 \rightsquigarrow$ $x \in U := B_d(x, r)$, $y \in V := B_d(y, r)$ e $U \cap V = \emptyset$.

Oss. $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ e i loro sottospazi sono T_2 in quanto metrizzabili. In particolare I^n, B^n, S^n e T^n sono T_2.

Oss. $T_2 \Rightarrow$ unicità del limite per funzioni e successioni.

Teor. *X è $T_1 \Leftrightarrow \forall\, x \in X$, $\{x\}$ è chiuso in X.*

In altre parole uno spazio è $T_1 \Leftrightarrow$ i punti sono chiusi.

Dim. $\boxed{\Rightarrow}$ $\forall\, x \in X$, $\forall\, y \in X - \{x\}$, $\exists\, U, V \subset X$ aperti t.c. $x \in U - V$ e $y \in V - U \Rightarrow y \in V \subset X - \{x\} \Rightarrow X - \{x\}$ aperto.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\forall\, x \neq y \in X \rightsquigarrow U := X - \{y\}$, $V := X - \{x\}$ aperti $\Rightarrow$ $x \in U - V$ e $y \in V - U$. $\square$

Oss. La retta con due origini $R_{\div}$ è T_1 ma non T_2.

Oss. T_1 e T_2 si preservano a meno di prodotti topologici. Esercizio.

Oss. $X_1, \ldots, X_n$ spazi $T_1 \Rightarrow i_j : X_j \hookrightarrow X_1 \times \cdots \times X_n$ immers. chiusa $\forall\, j$.

Prop. *X è $T_2 \Leftrightarrow$ la diagonale $\Delta := \{(x, x) \mid x \in X\}$ è chiusa in $X \times X$.*

Dim. $\boxed{\Rightarrow}$ $\forall\, (x, y) \in (X \times X) - \Delta \Rightarrow \exists\, U, V \subset X$ aperti t.c. $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \emptyset \Rightarrow (x, y) \in U \times V \subset (X \times X) - \Delta \Rightarrow (X \times X) - \Delta$ aperto.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\forall\, x \neq y \in X \Rightarrow (x, y) \in (X \times X) - \Delta \Rightarrow \exists\, U \times V \subset X \times X$ aperto basico t.c. $(x, y) \in U \times V \subset (X \times X) - \Delta \Rightarrow x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \emptyset$. $\square$

Cor. *$f, g : X \to Y$ continue e Y di Hausdorff $\Rightarrow$ l'insieme di coincidenza*

$$C(f, g) := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

è chiuso in X.

Dim. $F : X \to Y \times Y$, $F(x) = (f(x), g(x))$ continua perché le componenti sono continue $\Rightarrow C(f, g) = F^{-1}(\Delta)$ chiuso, con $\Delta \subset Y \times Y$ diag. di Y. $\square$

Proprietà topologiche ereditarie

Def. Una proprietà topologica $\mathcal{P}$ è *ereditaria* se valendo per uno spazio X vale anche per tutti i sottospazi topologici di X.

Oss. Se X ha una proprietà topologica ereditaria $\mathcal{P}$ e $Y \hookrightarrow X \Rightarrow Y$ ha $\mathcal{P}$.

Oss. La metrizzabilità è una proprietà topologica ereditaria.

Prop. *T_1 e T_2 sono proprietà topologiche ereditarie.*

Dim. Dimostriamolo per T_2. T_1 è lasciata per Esercizio.
$\boxed{T_2 \textit{ proprietà topologica}}$ X T_2 e $X \cong Y \Rightarrow \exists f : X \to Y$ omeo.
$\forall y_1 \neq y_2 \in Y$ $\exists U, V \subset X$ aperti t.c. $f^{-1}(y_1) \in U$, $f^{-1}(y_2) \in V$, $U \cap V = \emptyset$ $\Rightarrow f(U), f(V) \subset Y$ aperti, $y_1 \in f(U)$, $y_2 \in f(V)$, $f(U) \cap f(V) = \emptyset$.

$\boxed{T_2 \textit{ ereditaria}}$ X T_2 e $Y \subset X$. $\forall y_1 \neq y_2 \in Y$, $\exists U, V \subset X$ aperti t.c. $y_1 \in U$, $y_2 \in V$, $U \cap V = \emptyset \Rightarrow U \cap Y$ e $V \cap Y$ aperti disgiunti in Y. $\square$