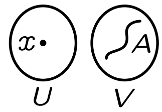
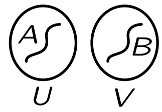
Assiomi di separazione $\mathbf{T_3}$ e $\mathbf{T_4}$

Def. Uno spazio topologico X è detto:

T_3 o *regolare* se X è T_1 e $\forall\, A \subset X$ chiuso, $\forall\, x \in X - A$
$\Rightarrow \exists\, U, V \subset X$ aperti t.c. $x \in U$, $A \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$.



T_4 o *normale* se X è T_1 e $\forall\, A, B \subset X$ chiusi t.c. $A \cap B = \emptyset$
$\Rightarrow \exists\, U, V \subset X$ aperti t.c. $A \subset U$, $B \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$.



Oss. $T_4 \not\Leftarrow\!\Rightarrow T_3 \not\Leftarrow\!\Rightarrow T_2 \not\Leftarrow\!\Rightarrow T_1$.

N.B. In alcune referenze non si assume T_1 per regolare e normale. T_3 e T_4 sono accettati secondo la definizione data.

N.B. Esistono spazi T_3 non T_4, uno lo vedremo (forse) più avanti. Esempi di spazi T_2 non T_3 esistono ma non li esamineremo.

Prop. *T_3 e T_4 sono proprietà topologiche e T_3 è ereditaria.*

Dim. T_3 e T_4 proprietà topologiche: simile a T_2 nella lezione precedente. Mostriamo che T_3 è ereditaria. Sia X spazio T_3 e $Y \subset X$. Facciamo vedere che Y è T_3. Y è T_1 perché T_1 è ereditaria.

$\forall\, A \subset Y$ chiuso in Y, $\forall\, y \in Y - A$, $\exists\, \tilde{A} \subset X$ chiuso in X t.c. $A = \tilde{A} \cap Y$ $\Rightarrow y \in X - \tilde{A} \Rightarrow \exists\, U, V \subset X$ aperti t.c. $y \in U$, $\tilde{A} \subset V$, $U \cap V = \emptyset \Rightarrow$ $U' = U \cap Y$ e $V' = V \cap Y$ aperti in Y t.c. $y \in U'$, $A \subset V'$, $U' \cap V' = \emptyset$. $\square$

Oss. La dimostrazione non si estende a T_4 perché non è detto che esistano chiusi *disgiunti* $\tilde{A}, \tilde{B} \subset X$ t.c. $A = \tilde{A} \cap Y$, $B = \tilde{B} \cap Y$.

N.B. T_4 *non* è ereditaria, esistono controesempi ma non li esaminiamo. Per controesempi in topologia vedi Steen e Seebach, *Counterexamples in Topology*, e il sito π-Base `https://topology.pi-base.org/`

Oss. I sottospazi *chiusi* di spazi topologici T_4 sono T_4.

Esempio. La retta di Sorgenfrey $\mathbb{R}_\ell$ è T_4. $\mathbb{R}_\ell$ è T_1 (punti chiusi).
$\forall\, A, B \subset \mathbb{R}_\ell$ chiusi disgiunti non vuoti $\Rightarrow$

$\forall\, a \in A\ \exists\, a' > a$ t.c. $[a, a'[\, \subset \mathbb{R}_\ell - B \rightsquigarrow U = \bigcup_{a \in A} [a, a'[$

$\forall\, b \in B\ \exists\, b' > b$ t.c. $[b, b'[\, \subset \mathbb{R}_\ell - A \rightsquigarrow V = \bigcup_{b \in B} [b, b'[$

aperti t.c. $A \subset U$, $B \subset V$, $U \cap V = \emptyset$.

Oss. Per scegliere gli a' e b' occorre l'*Assioma della scelta*.

Teor. *Ogni spazio metrizzabile è T_4.*

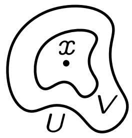
Dim. (X, d) spazio metrico $\Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1$.
$\forall\, A, B \subset X$ chiusi non vuoti disgiunti $\rightsquigarrow$

$$U = \{x \in X \mid d(x, A) < d(x, B)\}$$
$$V = \{x \in X \mid d(x, A) > d(x, B)\}.$$

Disuguaglianze continue strette incompatibili $\Rightarrow U, V$ aperti e $U \cap V = \emptyset$.
A e B chiusi disgiunti $\Rightarrow A \subset U$ e $B \subset V$. Quindi X è T_4. $\square$

Oss. $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ e i loro sottospazi sono T_4 perché metrizzabili.
In particolare I^n, B^n, S^n e T^n sono T_4.

Prop. *Sia X spazio T_3. $\forall\, x \in X$, $\forall\, U \subset X$ intorno aperto di x, $\exists\, V \subset X$ intorno aperto di x t.c. $\mathrm{Cl}_X V \subset U$.*



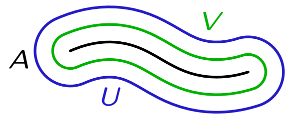
Dim. $A := X - U$ chiuso e $x \in X - A \Rightarrow \exists\, V, W \subset X$ aperti t.c. $x \in V$, $A \subset W$, $V \cap W = \emptyset \Rightarrow V \subset X - W \subset X - A = U$ e $X - W$ chiuso $\Rightarrow \mathrm{Cl}_X V \subset X - W \subset U$. □

Cor. *Supponiamo che X sia T_1. Allora X è T_3 $\Leftrightarrow$ ogni punto $x \in X$ ammette base di intorni chiusi.*

Dim. $\boxed{\Rightarrow}$ Per la Prop. la famiglia degli intorni chiusi di x è base di intorni.
$\boxed{\Leftarrow}$ X è T_1 per ipotesi. $\forall\, A \subset X$ chiuso, $\forall\, x \in X - A$, $\exists\, W \subset X$ intorno chiuso di x t.c. $W \subset X - A$ (aperto) $\rightsquigarrow U = \mathrm{Int}_X W$, $V = X - W$ aperti t.c. $x \in U$, $A \subset V$, $U \cap V = \emptyset$. □

Per gli spazi T_4 valgono enunciati analoghi, le dimostrazioni sono simili e vengono lasciate per Esercizio.

Prop. *Sia X spazio T_4. $\forall\, A \subset X$ chiuso, $\forall\, U \subset X$ intorno aperto di A $\exists\, V \subset X$ intorno aperto di A t.c. $\mathrm{Cl}_X V \subset U$.*



Cor. *Supponiamo che X sia T_1. Allora X è T_4 $\Leftrightarrow$ ogni chiuso $A \subset X$ ammette base di intorni chiusi.*