Assiomi di numerabilità

Def. Un insieme A è *numerabile* se $\exists\,\varphi\colon A \to \mathbb{N}$ iniettiva.

Oss. A numerabile $\Leftrightarrow$ A finito oppure in biiezione con $\mathbb{N}$.

Oss. A numerabile $\Leftrightarrow \exists\,\psi\colon \mathbb{N} \to A$ suriettiva.

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ sono numerabili. Si può dimostrare che sono numerabili le unioni numerabili di insiemi numerabili e i prodotti finiti di insiemi numerabili $\Rightarrow$ $\mathbb{Q}^n$ numerabile. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ non è numerabile. $\mathbb{R}$ non è numerabile (Cantor).

Def. Uno spazio topologico X è detto:

I-Numerabile se ogni punto $x \in X$ ammette base di intorni numerabile

$$\mathcal{J}_x = \{J_{x,n}\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

II-Numerabile se X ammette base numerabile

$$\mathcal{B} = \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

Oss. Metrizzabile $\Rightarrow$ I-numerabile: $\mathcal{J}_x = \left\{B\left(x, \frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Esempio. $\mathbb{R}_\ell$ I-numerabile: $\mathcal{J}_x = \left\{\left[x, x+\frac{1}{n}\right[\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.
$\mathbb{R}_\ell$ non II-numerabile (lo mostreremo più avanti).

Esempio. $\mathbb{R}_{\text{dis}}$ non II-numerabile.

Prop. *II-numerabile $\Rightarrow$ I-numerabile.*

Dim. X spazio II-numerabile, $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ base numerabile per X $\rightsquigarrow$ $\forall\, x \in X$, $\mathcal{J}_x = \{B_n \in \mathcal{B} \mid x \in B_n\}$ base di intorni numerabile di x. $\square$

N.B. I-numerabile $\not\Rightarrow$ II-numerabile.

Def. $D \subset X$ è *denso* in X se $\mathrm{Cl}_X\, D = X$.

Prop. *$D \subset X$ è denso $\Leftrightarrow \forall\, U \subset X$ aperto non vuoto si ha $D \cap U \neq \emptyset$.*

Dim. Segue subito dalla caratterizzazione dei punti della chiusura. $\square$

Oss. Se su X è data una base, è sufficiente considerare aperti basici.

Esempio. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ denso numerabile. $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ denso numerabile.

Esempio. $\mathbb{R} - \{0\} \subset \mathbb{R}$ aperto denso.

Def. Uno spazio top. X è *separabile* se X ammette un denso numerabile.

Esempio. $\mathbb{R}^n$ separabile: $\mathbb{Q}^n$ denso numerabile.

Esempio. $\mathbb{R}_\ell$ separabile: $\mathbb{Q}$ denso numerabile.

Prop. *I-numerabile e II-numerabile sono proprietà topologiche ereditarie. Separabile è una proprietà topologica.*

N.B. Separabile *non* è ereditaria.

Prop. *Ogni spazio topologico II-numerabile è separabile.*

Dim. X II-numerabile, $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ base numerabile di aperti non vuoti $\Rightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, a_n \in B_n \rightsquigarrow D = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset X$ denso numerabile. $\square$

N.B. Separabile $\not\Rightarrow$ II-numerabile.

N.B. Si usa l'Assioma della scelta.

Teor. *Ogni spazio metrizzabile separabile è II-numerabile.*

Dim. (X, d) spazio metrico, $D = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ denso numerabile in $X \rightsquigarrow$

$$\mathcal{B} = \left\{ B_d\Big(a_n, \frac{1}{k}\Big) \;\middle|\; n, k \in \mathbb{N} \right\}$$

famiglia numerabile di bocce aperte, mostriamo che è base.
$\forall\, U \subset X$ aperto, $\forall\, x \in U \Rightarrow \exists\, r > 0$ t.c. $B_d(x, r) \subset U \rightsquigarrow \exists\, k \in \mathbb{N}$ t.c. $\frac{1}{k} < \frac{r}{2}$
$\rightsquigarrow \exists\, n \in \mathbb{N}$ t.c. $a_n \in B_d(x, \frac{1}{k}) \Rightarrow x \in B_d(a_n, \frac{1}{k}) \subset B_d(x, r) \subset U$. □

Cor. *X metrizzabile separabile e $Y \subset X \Rightarrow Y$ II-numerabile e separabile.*

Dim. X II-numerabile $\Rightarrow Y$ II-numerabile $\Rightarrow Y$ separabile. □

Cor. $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, B^n, S^n *e* T^n *sono I-numerabili, II-numerabili e separabili.*

Successioni

Def. Una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ in uno spazio top. X *converge* a $x \in X$ se $\forall\, U \subset X$ intorno di x, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ t.c. $x_n \in U\ \forall\, n \geqslant N$, e scriviamo

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

N.B. Non è detto che il limite esista e se esiste non è detto che sia unico. Vale l'unicità del limite negli spazi di Hausdorff.

Esempio. $\forall\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X_{\text{ban}}$ converge a $\forall\, x \in X_{\text{ban}}$.

Prop. *Sia (X, d) spazio metrico. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ converge a $x \in X \Leftrightarrow$*

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0.$$

La dimostrazione è semplice e nota dall'Analisi.

Prop. *Supponiamo X spazio metrizzabile e $A \subset X$ non vuoto.*
$\forall\, x \in X$ si ha $x \in \mathrm{Cl}_X A \Leftrightarrow \exists\, (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ t.c. $\lim_{n\to\infty} a_n = x$.

Dim. $\boxed{\Leftarrow}$ Si usa il fatto che $x \in \mathrm{Cl}_X A \Leftrightarrow d(x, A) = 0$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Scegliamo distanza d su X. $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, a_n \in A \cap B_d(x, \frac{1}{n})$. □

Cor. *Supponiamo X metrizzabile. $D \subset X$ è denso in $X \Leftrightarrow$*
$\forall\, x \in X$, $\exists\, (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ t.c. $\lim_{n\to\infty} a_n = x$.

Oss. Generalizza il fatto che ogni numero reale è limite di numeri razionali.