Spazi compatti

Def. Un *ricoprimento aperto* di uno spazio topologico X è una famiglia $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ di aperti di X, con A insieme arbitrario, t.c.

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = X.$$

Un *sottoricoprimento* di $\mathcal{U}$ per X è una sottofamiglia $\mathcal{U}' = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A'}$, con $A' \subset A$, che sia a sua volta un ricoprimento aperto, ossia

$$\bigcup_{\alpha \in A'} U_\alpha = X.$$

Un sottoricoprimento $\mathcal{U}' = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A'}$ è *finito* se A' è un insieme finito.

Def. Uno spazio topologico X è *compatto* se ogni ricoprimento aperto di X ammette un *sottoricoprimento finito*.

N.B. Si chiama anche *compattezza per ricoprimenti*, in contrasto con la *compattezza per successioni* usata in Analisi che richiameremo più avanti.

Oss. X compatto $\Leftrightarrow \forall \mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ricoprimento aperto di X, $\exists\, n \in \mathbb{N}$, $\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$ t.c.

$$\bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} = X.$$

Oss. X non compatto $\Leftrightarrow \exists \mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ricoprimento aperto di X t.c. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$ si ha

$$\bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} \subsetneq X.$$

Oss.

X_{ban} compatto $\forall\, X$.
X finito $\Rightarrow X$ compatto.
X_{dis} compatto $\Leftrightarrow X_{\text{dis}}$ finito: $\{\{x\}\}_{x \in X_{\text{dis}}}$ ricoprimento aperto di X_{dis}.
$\mathbb{R}^n$ non compatto $\forall\, n \geqslant 1$: $\{B(0,k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ non ha sottoricoprimenti finiti.
$\mathbb{R}_\ell$ non compatto: $\{[k, k+1[\}_{k \in \mathbb{Z}}$ non ha sottoricoprimenti finiti.

La dimostrazione della Proposizione seguente è lasciata per Esercizio.

Prop. *La compattezza è una proprietà topologica.*

Def. Sia $\mathcal{B}$ base per X. Un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ di X è *basico* se $U_\alpha \in \mathcal{B}\ \forall\, \alpha \in A$.

Prop. *Sia $\mathcal{B}$ base per X. Allora X è compatto $\Leftrightarrow$ ogni ricoprimento basico di X ammette un sottoricoprimento finito.*

Dim. $\boxed{\Rightarrow}$ Evidente.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\forall \mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ricoprimento aperto di $X \rightsquigarrow$

$$\mathcal{V} = \{B \in \mathcal{B} \mid \exists\, \alpha \in A \text{ t.c. } B \subset U_\alpha\}$$

ricoprimento basico di $X \rightsquigarrow \{B_1, \dots, B_n\}$ sottoricoprimento finito di $\mathcal{V}$ $\Rightarrow \forall\, i \in \{1, \dots, n\}$, $\exists\, \alpha_i \in A$ t.c. $B_i \subset U_{\alpha_i} \Rightarrow \{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}\}$ sottoricoprimento finito di $\mathcal{U}$. $\square$