Lem. *$I = [0,1]$ è compatto come sottospazio di $\mathbb{R}$.*

Dim. Gli intervalli del tipo $[0,b[$, $]a,1]$, $]a,b[$, $\forall\, 0 \leqslant a < b \leqslant 1$ sono base per $[0,1]$, ottenuta intersecando la base di intervalli aperti di $\mathbb{R}$ con $[0,1]$.

$\forall\, \mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ ricoprimento basico per $[0,1]$ consideriamo

$$T := \left\{ t \in [0,1] \;\middle|\; \exists\, n \in \mathbb{N}, \exists\, \alpha_1 \dots, \alpha_n \in A \text{ t.c. } [0,t] \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} \right\}.$$

In altre parole: $t \in T \Leftrightarrow [0,t]$ finitamente ricoperto da aperti di $\mathcal{U}$.

$\exists\, a < b$ t.c. $U_0 = [0,a[$ e $U_1 =]b,1] \in \mathcal{U} \Rightarrow U_0 \subset T \neq \emptyset$.

$s := \sup T > 0$. Mostriamo che $s = 1$. Se per assurdo $s < 1 \Rightarrow$ $\exists\, \alpha \in A$ t.c. $s \in U_\alpha \Rightarrow \exists\, t \in T \cap U_\alpha$, $\exists\, s' \in U_\alpha$ t.c. $s' > s \rightsquigarrow$ $[0,s'] = [0,t] \cup [t,s'] \subset U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_n} \cup U_\alpha \Rightarrow s' \in T$ contraddizione.

$\exists\, t \in T \cap U_1 \rightsquigarrow [0,1] = [0,t] \cup [t,1] = U_{\alpha_1} \dots \cup U_{\alpha_n} \cup U_1$. $\square$

Oss. $[0,1]_\ell \subset \mathbb{R}_\ell$ *non* è compatto nella topologia di Sorgenfrey

$$\mathcal{U} = \left\{ \left[1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1} \right[\right\}_{n\in\mathbb{N}} \bigcup \{\{1\}\}.$$

Proprietà degli spazi compatti

Teor. *X compatto e $Y \subset X$ chiuso $\Rightarrow$ Y compatto.*

Dim. $\forall\, \mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ ricoprimento aperto di $Y \Rightarrow \forall\, \alpha \in A$, $\exists\, U_\alpha \subset X$ aperto t.c. $V_\alpha = U_\alpha \cap Y \Rightarrow \mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A} \cup \{X - Y\}$ ricoprimento aperto di $X \rightsquigarrow \{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}, X - Y\}$ sottoricoprimento finito di $\mathcal{U}$ per $X \Rightarrow$ $\{V_{\alpha_1}, \dots, V_{\alpha_n}\}$ sottoricoprimento finito di $\mathcal{V}$ per Y. $\square$

Oss. Non vale implicazione inversa: $\mathbb{R}_{\text{ban}}$ compatto, $Y = \{0\} \subset \mathbb{R}_{\text{ban}}$ compatto non chiuso.

Teor. *X compatto e $f : X \to Y$ continua e suriettiva $\Rightarrow$ Y compatto.*

Dim. $\forall\, \mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ ricoprimento aperto di $Y \Rightarrow U_\alpha := f^{-1}(V_\alpha)$ aperto in X e $V_\alpha = f(U_\alpha)$ perché f suriettiva. $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ ricoprimento aperto di X $\rightsquigarrow \{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}\}$ sottoricoprimento finito di $\mathcal{U}$ per $X \Rightarrow \{V_{\alpha_1}, \dots, V_{\alpha_n}\}$ sottoricoprimento finito di $\mathcal{V}$ per $Y = f(X)$. $\square$

Cor. *X compatto $\Rightarrow$ $X/\!\sim$ compatto.*

Cor. *X compatto e $f : X \to Y$ continua $\Rightarrow$ $f(X) \subset Y$ compatto.*

Oss. In altre parole: l'immagine continua di un compatto è compatta.

Teor. *X spazio di Hausdorff, $Y \subset X$ sottospazio compatto, $x \in X - Y \Rightarrow$ $\exists\, U, V \subset X$ aperti t.c. $x \in U$, $Y \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$.*

Dim. $\forall\, y \in Y$, $\exists\, U_y, V_y \subset X$ aperti t.c. $x \in U_y$, $y \in V_y$, $U_y \cap V_y = \emptyset \rightsquigarrow$ $\{V_y \cap Y\}_{y\in Y}$ ricoprimento aperto di $Y \rightsquigarrow \{V_{y_1} \cap Y, \dots, V_{y_n} \cap Y\}$ sottoricoprimento finito $\rightsquigarrow$

$$U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i} \qquad V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$$

aperti in X t.c. $x \in U$, $Y \subset V$, $U \cap V = \emptyset$. $\square$

Teor. *X spazio di Hausdorff e $Y \subset X$ sottospazio compatto $\Rightarrow$ Y chiuso.*

Dim. $\forall\, x \in X - Y$, $\exists\, U, V \subset X$ aperti t.c. $x \in U$, $Y \subset V$ e $U \cap V = \emptyset \Rightarrow$ $x \in U \subset X - V \subset X - Y \Rightarrow X - Y$ aperto. $\square$

Teor. *$f : X \to Y$ continua e biiettiva con X compatto e Y di Hausdorff $\Rightarrow$ f omeomorfismo.*

Dim. Basta far vedere che f è chiusa. $\forall\, A \subset X$ chiuso $\Rightarrow A$ compatto $\Rightarrow$ $f(A) \subset Y$ compatto $\Rightarrow f(A)$ chiuso in Y. $\square$

Cor. *$f : X \to Y$ continua e iniettiva con X compatto e Y di Hausdorff $\Rightarrow$ f immersione.*

Dim. $f(X) \subset Y$ di Hausdorff (T_2 ereditaria), $f|_{f(X)} : X \to f(X)$ continua e biiettiva quindi omeo per il Teorema. $\square$

Lem. *X compatto di Hausdorff $\Rightarrow$ X è T_3.*

Dim. X è $T_2 \Rightarrow T_1$. $\forall\, Y \subset X$ chiuso $\Rightarrow Y$ compatto, $\forall\, x \in X - Y$, $\exists\, U, V \subset X$ aperti t.c. $x \in U$, $Y \subset V$, $U \cap V = \emptyset$. $\square$

Def. Uno spazio X è *localmente compatto* se $\forall\, x \in X$, $\exists\, J \subset X$ intorno compatto di x in X.

Oss. Compatto $\Rightarrow$ loc. compatto.

N.B. In genere le proprietà locali sono espresse in termini di basi di intorni aventi tali proprietà. Localmente compatto è un'eccezione.

Lem. *X compatto di Hausdorff $\Rightarrow \forall\, x \in X$, $\exists\, \mathcal{J}_x$ base di intorni compatti.*

Dim. Ogni punto ammette base di intorni chiusi, quindi compatti (vedi Lezione 9: caratterizzazione di T_3 mediante basi di intorni chiusi). $\square$

Cor. *X localmente compatto di Hausdorff $\Rightarrow \forall\, x \in X$, $\exists\, \mathcal{J}_x$ base di intorni compatti di x in X.*

Dim. $\forall\, x \in X$, $\exists\, J \subset X$ intorno compatto di x in $X \Rightarrow \exists\, \mathcal{J}_x$ base di intorni compatti di x in J e quindi in X. $\square$

Cor. *X localmente compatto di Hausdorff $\Rightarrow$ X è T_3.*

Teor. *X compatto di Hausdorff $\Rightarrow$ X è T_4.*

Dim. X è T_3. $\forall\, P, Y \subset X$ chiusi t.c. $P \cap Y = \emptyset \Rightarrow \forall\, y \in Y$, $\exists\, U_y, V_y \subset X$ aperti t.c. $P \subset U_y$, $y \in V_y$, $U_y \cap V_y = \emptyset \rightsquigarrow \{V_y \cap Y\}_{y \in Y}$ ricoprimento aperto di Y compatto $\rightsquigarrow \{V_{y_1} \cap Y, \ldots, V_{y_n} \cap Y\}$ sottoricoprimento finito

$$U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i} \qquad V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$$

aperti in X t.c. $P \subset U$, $Y \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$. $\square$

Lavoro di gruppo. Esiste un omeomorfismo tra $[0, 1[$ e S^1?