Compattezza dei prodotti finiti

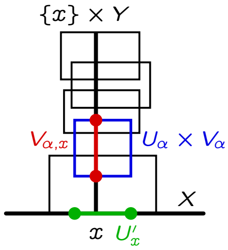
Teor. *$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, X_1, \dots, X_n$ spazi top. compatti $\Rightarrow X_1 \times \cdots \times X_n$ compatto.*

Dim. Basta dimostrarlo per $n = 2$ e fare induzione su n.
Supponiamo X e Y compatti e dimostriamo che $X \times Y$ è compatto.
$\forall\, \mathcal{W} = \{U_\alpha \times V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ricoprimento aperto basico di $X \times Y$, $\forall\, x \in X \rightsquigarrow$

$$V_{\alpha,x} := (U_\alpha \times V_\alpha) \cap (\{x\} \times Y) \;\Rightarrow$$

$\mathcal{V}_x = \{V_{\alpha,x}\}_{\alpha \in A}$ ricoprimento aperto di $\{x\} \times Y \cong Y \overset{Y \text{ cpt}}{\Longrightarrow} \exists\, A_x \subset A$ finito t.c. $\mathcal{V}'_x = \{V_{\alpha,x}\}_{\alpha \in A_x}$ sottoricoprimento di $\mathcal{V}_x$ e $\emptyset \notin \mathcal{V}'_x \Rightarrow x \in U_\alpha$, $\forall\, \alpha \in A_x$

$$\Rightarrow \; x \in U'_x := \bigcap_{\alpha \in A_x} U_\alpha \quad \text{(intersezione finita)} \;\Rightarrow$$



U'_x aperto in $X \rightsquigarrow \mathcal{U} = \{U'_x\}_{x \in X}$ ricoprimento aperto di X $\overset{X \text{ cpt}}{\rightsquigarrow} \{U'_{x_1}, \dots, U'_{x_k}\}$ sottoricoprimento finito di $\mathcal{U}$ per $X \rightsquigarrow$

$$A' := \bigcup_{i=1}^{k} A_{x_i} \subset A \quad \text{sottoinsieme finito} \;\Rightarrow$$

$\mathcal{W}' = \{U_\alpha \times V_\alpha\}_{\alpha \in A'}$ sottoricoprimento finito di $\mathcal{W}$, infatti:
$\forall\, (x, y) \in X \times Y \rightsquigarrow x \in U'_{x_i} \rightsquigarrow (x_i, y) \in V_{\alpha, x_i}$ per un certo $\alpha \in A_{x_i} \subset A'$
$\Rightarrow (x, y) \in U'_{x_i} \times V_\alpha \subset U_\alpha \times V_\alpha \in \mathcal{W}'$. Quindi $X \times Y$ è compatto. □

Cor. *I^n compatto $\forall\, n \geqslant 1$.*

Def. Il *diametro* di uno spazio metrico (X, d) è definito come

$$\operatorname{diam}(X) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in X\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

X è *limitato* se $\operatorname{diam}(X) < \infty$.

Teorema di Heine-Borel. *$X \subset \mathbb{R}^n$ è compatto $\Leftrightarrow$ X è chiuso e limitato.*

Dim. $\boxed{\Rightarrow}$ X compatto e $\mathbb{R}^n$ di Hausdorff $\Rightarrow X$ chiuso in $\mathbb{R}^n$.
$\{B(0, k) \cap X\}_{k \in \mathbb{N}}$ ricoprimento aperto di $X \rightsquigarrow$ sottoricoprimento finito $\Rightarrow X \subset B(0, k)$ con k massimo raggio $\Rightarrow X$ limitato.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\exists\, k \in \mathbb{N}$ t.c. $X \subset B(0, k) \subset [-k, k]^n \Rightarrow X$ chiuso in $[-k, k]^n \cong I^n$ compatto $\Rightarrow X$ compatto. □

Cor. *B^n, S^n e T^n sono compatti.*

Cor. *$\mathbb{R}^n$ è localmente compatto.*

Cor. *$X \subset \mathbb{R}$ compatto non vuoto $\Rightarrow X$ ha massimo e minimo.*

Dim. X chiuso e limitato $\Rightarrow \sup X \in \operatorname{Cl}_{\mathbb{R}} X = X \Rightarrow \sup X = \max X$. □

Cor. *$f : X \to \mathbb{R}$ continua e X compatto $\Rightarrow f$ ha massimo e minimo.*

Dim. $f(X) \subset \mathbb{R}$ compatto $\Rightarrow f(X)$ ha max e min $\Rightarrow f$ ha max e min. □

Enunciamo senza dimostrazione il seguente teorema di compattezza per prodotti arbitrari di spazi compatti.

Teorema di Tychonoff. *$\{X_i\}_{i \in I}$ spazi compatti $\Rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ compatto.*

Esempio. Il cubo di Hilbert $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ è compatto.

Compattezza per successioni

Def. Uno spazio X è *compatto per successioni* o *sequenzialmente compatto* se ogni successione in X ammette una sottosuccessione convergente.

N.B. La compattezza per ricoprimenti e la compattezza per successioni sono nozioni distinte e in generale nessuna delle due implica l'altra. Esistono esempi di spazi compatti ma non compatti per successioni e viceversa.

Il seguente teorema è noto dall'Analisi e non lo dimostriamo.

Teorema di Bolzano-Weierstrass. *$X \subset \mathbb{R}^n$ è compatto per successioni $\Leftrightarrow$ X è chiuso e limitato.*

Dai teoremi di Heine-Borel e Bolzano-Weierstrass si ha:

Cor. *$X \subset \mathbb{R}^n$ è compatto $\Leftrightarrow$ X è compatto per successioni.*

In generale vale il teorema seguente che enunciamo senza dimostrazione.

Teor. *Uno spazio metrizzabile è compatto $\Leftrightarrow$ è compatto per successioni.*

Relazione d'equivalenza indotta

Def. $f\colon X \to Y \rightsquigarrow \sim_f\colon \forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 \sim_f x_2 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} f(x_1) = f(x_2)$ *relazione d'equivalenza indotta da f.*

Oss. $f\colon X \to Y$ continua $\rightsquigarrow \bar{f}\colon X/{\sim_f} \to Y$, $\bar{f}([x]) := f(x)$ ben definita, continua e iniettiva, infatti $f = \bar{f} \circ \pi$. $\bar{f}$ è detta f *passata al quoziente.*

Oss. $f\colon X \to Y$ continua, $X/{\sim_f}$ compatto e Y di Hausdorff $\Rightarrow$
$\bar{f}\colon X/{\sim_f} \to Y$ immersione ($\bar{f}$ omeo se f è anche suriettiva).

Def. $A \subset X \rightsquigarrow X/A \overset{\text{def}}{=} X/(a_1 \sim a_2, \forall a_1, a_2 \in A)$. $A \in X/A$ è un punto.

Esempio. $[0,1]/\{0,1\} = [0,1]/(0 \sim 1) \cong S^1$

$$f\colon [0,1] \to S^1, \quad f(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$$

identifica 0 e 1 $\Rightarrow \bar{f}\colon [0,1]/\{0,1\} \to S^1$ omeo.

Spazi proiettivi

Caso reale. $\pi : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$. $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.
$\pi|_{S^n} : S^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ continua e suriettiva $\Rightarrow \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ compatto.
Infatti $[x] = \pi\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)$, $\forall\,[x] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n$.

Oss. $\forall\, x, y \in S^n$, $[x] = [y] \Leftrightarrow x = \pm y$.

Immersione in $\mathbb{R}^N$. $\forall\, i, j \in \{0, \dots, n\} \rightsquigarrow$

$$\varphi_{ij} : \mathbb{R}\mathrm{P}^n \to \mathbb{R}$$

$$\varphi_{ij}([x_0, \dots, x_n]) := \frac{x_i x_j}{x_0^2 + \cdots + x_n^2}$$

ben definita e continua perché $\varphi_{ij} \circ \pi$ è continua.

$$\varphi_{ij}([x]) = \varphi_{ij}([y]),\ \forall\, i, j \in \{0, \dots, n\} \ \Rightarrow\ [x] = [y].$$

$\varphi : \mathbb{R}\mathrm{P}^n \to \mathbb{R}^{(n+1)^2}$ con componenti φ_{ij} (in un certo ordine) continua iniettiva $\Rightarrow \varphi$ immersione $\Rightarrow \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ metrizzabile ($\Rightarrow$ di Hausdorff) e II-numerabile.

Retta proiettiva reale. $\mathbb{R}\mathrm{P}^1 \cong S^1/(x \sim -x,\ \forall\, x \in S^1) \cong I/\{0, 1\} \cong S^1$

Caso complesso. $\pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$. $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{2n+2}$.
$\pi|_{S^{2n+1}} : S^{2n+1} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ continua e suriettiva $\Rightarrow \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ compatto.
Infatti $[x] = \pi\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)$, $\forall\,[x] \in \mathbb{C}\mathrm{P}^n$.

Oss. $\forall\, x, y \in S^{2n+1}$, $[x] = [y] \Leftrightarrow \exists\, \alpha \in S^1 \subset \mathbb{C}$ t.c. $x = \alpha y$.

Immersione in $\mathbb{C}^N$. $\forall\, i, j \in \{0, \dots, n\} \rightsquigarrow$

$$\varphi_{ij} : \mathbb{C}\mathrm{P}^n \to \mathbb{C}$$

$$\varphi_{ij}([x_0, \dots, x_n]) := \frac{x_i \bar{x}_j}{|x_0|^2 + \cdots + |x_n|^2}$$

ben definita e continua perché $\varphi_{ij} \circ \pi$ è continua.

$$\varphi_{ij}([x]) = \varphi_{ij}([y]),\ \forall\, i, j \in \{0, \dots, n\} \ \Rightarrow\ [x] = [y].$$

$\varphi : \mathbb{C}\mathrm{P}^n \to \mathbb{C}^{(n+1)^2}$ con componenti φ_{ij} (in un certo ordine) continua iniettiva $\Rightarrow \varphi$ immersione $\Rightarrow \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ metrizzabile ($\Rightarrow$ di Hausdorff) e II-numerabile.