Incollamenti topologici

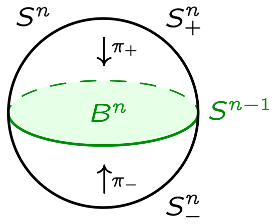
Incollamento di due spazi. $A \subset X$, $f : A \to Y \rightsquigarrow$

$$X \cup_f Y \overset{\text{def}}{=} (X \sqcup Y)/(a \sim f(a),\ \forall\, a \in A) \quad \textit{(incollamento mediante } f\textit{)}$$

$$f : A \xrightarrow{\cong} f(A) \text{ omeo} \rightsquigarrow X \cup_A Y := X \cup_f Y \ \textit{(incollamento lungo } A\textit{).}$$

Esempio. $S^n_\pm := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid \pm x_{n+1} \geqslant 0\}$ emisferi

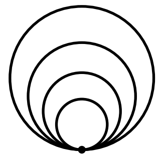
$$\pi_\pm : S^n_\pm \xrightarrow{\cong} B^n \quad \text{omeo}$$
$$\pi_\pm(x_1 \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n)$$
$$\pi_\pm^{-1}(x) = \left(x,\ \pm\sqrt{1 - \|x\|^2}\right)$$
$$S^n = S^n_+ \cup S^n_- \qquad S^{n-1} = S^n_+ \cap S^n_-$$
$$S^n \cong B^n \cup_{S^{n-1}} B^n$$



Unione puntata. Dati $x_0 \in X$, $y_0 \in Y \rightsquigarrow$

$$X \vee Y \overset{\text{def}}{=} (X \sqcup Y)/(x_0 \sim y_0) \quad \textit{unione puntata} \text{ di } X \text{ e } Y$$

Esempio. $\vee_n S^1$ unione puntata di n copie di S^1
(bouquet di circonferenze).



Autoincollamento. $A \subset X$, $f : A \to X \rightsquigarrow$

$$X/\sim_f = X/(a \sim f(a),\ \forall\, a \in A)$$

Immersione del toro in $\mathbb{R}^3$

$$\mathbb{R}_+ :=]0, +\infty[\cong \mathbb{R}$$

$$f : S^1 \times \mathbb{R}_+ \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^2 - \{0\} \quad \text{omeo}$$
$$f((x_1, x_2), y) = (x_1 y, x_2 y)$$
$$f^{-1}(v) = \left(\frac{v}{\|v\|},\ \|v\|\right)$$

Identifichiamo S^1 con la circonferenza in $\mathbb{R}^2$ di centro $(2, 0)$ e raggio 1

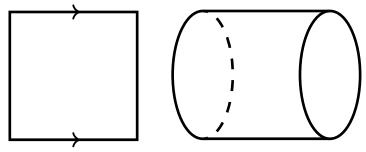
$$S^1 \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$$
$$T^2 = S^1 \times S^1 \subset S^1 \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \cong (\mathbb{R}^2 - \{0\}) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$$

$$\varphi : T^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{immersione}$$
$$\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (x_1(y_1 + 2), x_2(y_1 + 2), y_2)$$

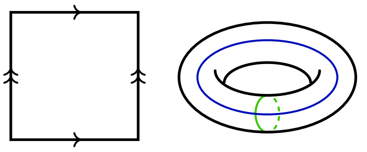
Oss. Si generalizza ad un'immersione $T^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ (induzione su $n \geqslant 1$).

Quozienti del quadrato

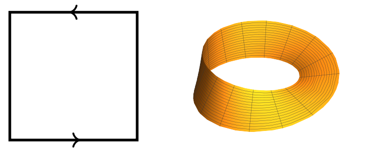
Incolliamo i lati linearmente a due a due seguendo le frecce.



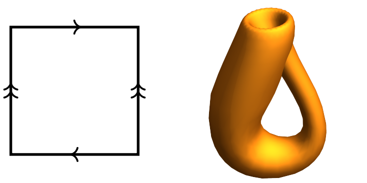
$I \times S^1$
Anello o cilindro



$T^2 = S^1 \times S^1$
Toro



Mb
Striscia di Möbius



Kl
Bottiglia di Klein

Alcuni omeomorfismi degli spazi Euclidei

$\forall\, f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ continua $\rightsquigarrow$ $T_f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{n+k}$

$$T_f(x, y) = (x, y + f(x))$$

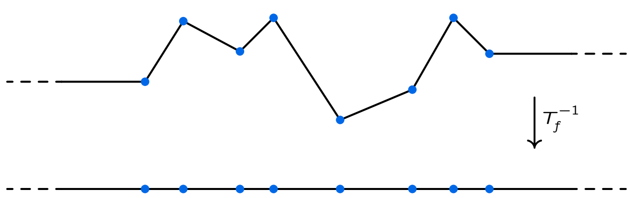
T_f continua e $T_f^{-1} = T_{-f} \Rightarrow T_f$ omeomorfismo.
$T_f(x, 0) = (x, f(x))$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow T_f(\mathbb{R}^n \times \{0\}) =$ grafico di f.

Sottoinsiemi finiti di $\mathbb{R}^2$. $A = \{(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)\} \subset \mathbb{R}^2$ punti distinti. A meno di rotazione e riordinamento, possiamo assumere $a_i < a_j$, $\forall\, i < j$.

F = spezzata ottenuta congiungendo i punti di A e prolungandola indefinitamente con due semirette orizzontali.

$F =$ grafico di $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow T_f : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^2$ omeo t.c.

$$T_f^{-1}(A) \subset (\text{asse } x).$$

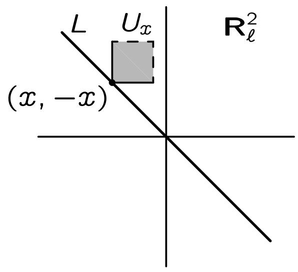


Il piano di Sorgenfrey

Il *piano di Sorgenfrey* è il prodotto topologico $\mathbb{R}_\ell^2 = \mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell$.
$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}_\ell$ denso $\Rightarrow \mathbb{Q}^2 \subset \mathbb{R}_\ell^2$ denso $\Rightarrow \mathbb{R}_\ell^2$ separabile.

$$L := \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}_\ell^2 \qquad \text{seconda diagonale}$$

$$U_x := [x, x+1[\times [-x, -x+1[\qquad \text{aperto basico in } \mathbb{R}_\ell^2$$



$U_x \cap L = \{(x, -x)\}$ aperto in L, $\forall\, (x, -x) \in L \Rightarrow L \cong \mathbb{R}_{\text{dis}}$ discreto $\Rightarrow$ L non II-numerabile $\Rightarrow \mathbb{R}_\ell^2$ non II-numerabile (II-num. ereditaria) $\Rightarrow$ $\mathbb{R}_\ell^2$ non metrizzabile (metrizzabile separabile $\Rightarrow$ II-num.) $\Rightarrow$ $\mathbb{R}_\ell$ non metrizzabile e non II-numerabile.

Considerando i punti razionali e quelli irrazionali su L si ottengono due chiusi non separabili con aperti disgiunti, dimostrando che $\mathbb{R}_\ell^2$ non è T_4. Ricordando che $\mathbb{R}_\ell$ è T_4 si ha un esempio di spazio prodotto di due spazi T_4 che non è T_4, ossia T_4 non si preserva a meno di prodotti.