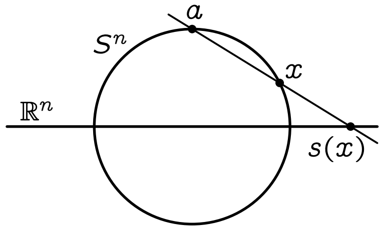
Proiezione stereografica

$a = (0, \dots, 0, 1) \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$
$\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ identificato con l'iperpiano di equazione $x_{n+1} = 0$.
$\forall\, x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n - \{a\} \rightsquigarrow s(x) = L(a, x) \cap \mathbb{R}^n$, intersezione della retta $L(a, x)$ con $\mathbb{R}^n$. Si ottiene la formula seguente per $s(x)$.

Def. L'applicazione

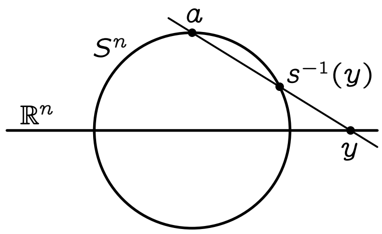


$$s : S^n - \{a\} \to \mathbb{R}^n$$
$$s(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{(x_1, \dots, x_n)}{1 - x_{n+1}}$$

è detta *proiezione stereografica dal punto a*.

Quindi s è continua e con alcuni calcoli lasciati per esercizio si determina l'applicazione inversa, anch'essa continua.

Prop. *La proiezione stereografica è un omeomorfismo con inversa*



$$s^{-1} : \mathbb{R}^n \to S^n - \{a\}$$
$$s^{-1}(y) = \frac{(2y, \|y\|^2 - 1)}{\|y\|^2 + 1}$$

$\forall\, y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Oss. $S^n - \{a\} \cong \mathbb{R}^n$.

Oss. $s^{-1}(\mathbb{R}^n) = S^n - \{a\}$ aperto denso in S^n.

Oss. $s(0, \dots, 0, -1) = 0$.

Oss. Più in generale si può considerare la proiezione stereografica da un punto qualunque $u \in S^n$ verso l'iperpiano ortogonale $u^\perp \cong \mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^{n+1}$.

Idea euristica.

$\lim_{x \to a} s(x) = \infty \overset{\text{Idea}}{\rightsquigarrow} a \in S^n$ corrisponde al "punto all'infinito" di $\mathbb{R}^n$.

Compattificazione di Alexandrov

Def. Una *compattificazione* di uno spazio topologico non compatto X è un'immersione di X come sottospazio denso di uno spazio compatto $\overline{X}$.

Teorema di Alexandrov. *X spazio topologico T_2 localmente compatto non compatto $\Rightarrow \exists\, \widehat{X} = X \cup \{\infty\}$ compattificazione T_2 di X, con $\infty \notin X$. Inoltre $\widehat{X}$ è unico a meno di omeomorfismi.*

Def. $\widehat{X}$ è detto *compattificazione di Alexandrov* o *compattificazione con un punto* di X. ∞ è il *punto all'infinito di X* e lo indicheremo anche ∞_X.

Dim. Poniamo $\widehat{X} := X \cup \{\infty\}$, dove ∞ indica un punto t.c. $\infty \notin X$.

<u>*Topologia di $\widehat{X}$*</u>. $U \subset \widehat{X}$ aperto $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} a)\ U \subset X \text{ aperto in } X, & \infty \notin U \\ b)\ X - U \subset X \text{ compatto}, & \infty \in U \end{cases}$

Gli aperti di $\widehat{X}$ sono gli aperti di X e i complementari dei compatti di X. Verifichiamo che è una topologia.

1) $\emptyset$ e $\widehat{X}$ aperti rispettivamente di tipo (a) e (b).

2) $\forall\, \{U_i\}_{i\in I}$ famiglia di aperti di $\widehat{X}$ poniamo

$I_0 := \{i \in I \mid \infty \notin U_i\} \rightsquigarrow U_0 := \bigcup_{i\in I_0} U_i \subset X$ aperto (a)

$I_\infty := \{i \in I \mid \infty \in U_i\} \rightsquigarrow U_\infty := \bigcup_{i\in I_\infty} U_i$ e $U := \bigcup_{i\in I} U_i = U_0 \cup U_\infty$

$I_\infty = \emptyset \Rightarrow U = U_0$ aperto. Supponiamo $I_\infty \neq \emptyset \Rightarrow \infty \in U_\infty$.

$X - U_\infty = X - \bigcup_{i\in I_\infty} U_i = \bigcap_{i\in I_\infty} \underbrace{(X - U_i)}_{\text{compatto}} \subset X$ $\underset{X\ T_2}{\text{compatto}} \Rightarrow U_\infty$ aperto (b).

$X - U = \underbrace{(X - U_0)}_{\text{chiuso in } X} \cap \underbrace{(X - U_\infty)}_{\text{compatto}} \subset X$ compatto $\Rightarrow U$ aperto (b).

3) $\forall\, U, V \subset \widehat{X}$ aperti. Entrambi (a) $\Rightarrow U \cap V$ aperto (a).

U tipo (a) e V tipo (b) $\Rightarrow K := X - V \subset X$ compatto e
$V_0 := X \cap V = X - K$ aperto in $X \Rightarrow U \cap V = U \cap V_0$ aperto (a).

Entrambi (b) $\Rightarrow X - (U \cap V) = \underbrace{(X - U)}_{\text{compatto}} \cup \underbrace{(X - V)}_{\text{compatto}} \Rightarrow U \cap V$ ap. (b).

<u>*$\widehat{X}$ compatto*</u>. $\forall\, \{U_i\}_{i\in I}$ ricoprimento aperto di $\widehat{X} \Rightarrow \exists\, i_\infty \in I$ t.c. $\infty \in U_{i_\infty}$

$\rightsquigarrow K := X - U_{i_\infty} \subset X$ compatto $\rightsquigarrow K \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n} \Rightarrow$
$\{U_{i_1}, \dots, U_{i_n}, U_{i_\infty}\}$ sottoricoprimento finito.

<u>*X denso in $\widehat{X}$*</u>. $\forall\, \emptyset \neq U \subset \widehat{X}$ aperto. U tipo (a) $\Rightarrow U \cap X = U \neq \emptyset$.

U tipo (b) $\rightsquigarrow \underset{\text{cpt}}{K} := X - U \subsetneq \underset{\substack{\text{non}\\ \text{cpt}}}{X} \Rightarrow U \cap X = X - K \neq \emptyset$.

$\underline{T_2}$. $\forall x \neq y \in \widehat{X}$. $x, y \in X \Rightarrow \exists\, U, V$ aperti (a) t.c. $x \in U$, $y \in V$, $U \cap Y = \emptyset$.

$x \in X$ e $y = \infty \Rightarrow \exists\, W \subset \underset{\substack{\text{loc.}\\\text{cpt}}}{X}$ intorno compatto di $x \rightsquigarrow$

$U := \mathrm{Int}_X W$, $V := \widehat{X} - W$ aperti in $\widehat{X}$ t.c. $x \in U$, $\infty \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.

Unicità. $\widehat{X}' = X \cup \{\infty'\}$, $\infty' \notin X$, altra compattificazione T_2 di $X \rightsquigarrow$

$$g : \widehat{X} \to \widehat{X}', \quad g(x) = \begin{cases} x, & x \neq \infty \\ \infty', & x = \infty \end{cases}$$

$\forall\, V \subset \widehat{X}'$ aperto. $\infty' \notin V \Rightarrow V \subset X \Rightarrow g^{-1}(V) = V$ aperto (a).

$\infty' \in V \Rightarrow K = \underbrace{\widehat{X}' - V}_{\text{chiuso in } \widehat{X}'} \subset X$ compatto $\Rightarrow g^{-1}(V) = \widehat{X} - K$ aperto (b).

g continua e biiettiva, $\widehat{X}$ compatto, $\widehat{X}'$ T_2 $\Rightarrow g$ omeomorfismo. □

Oss. $X \subset \widehat{X}$ aperto denso.

Applicazioni proprie

Def. $f : X \to Y$ è *propria* se $\forall\, K \subset Y$ compatto $\Rightarrow f^{-1}(K) \subset X$ compatto.

Oss. In altre parole $f : X \to Y$ è propria se la preimmagine di qualunque compatto è compatta.

Oss. $f : X \to Y$ omeomorfismo $\Rightarrow f$ propria.

Teor. *X, Y spazi T_2 loc. compatti non compatti, $f : X \to Y$ continua e propria $\Rightarrow \widehat{f} : \widehat{X} \to \widehat{Y}$ estensione di f t.c. $f(\infty_X) = \infty_Y$ continua.*

Dim. $\widehat{f} : \widehat{X} \to \widehat{Y}$, $\quad \widehat{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq \infty_X \\ \infty_Y & x = \infty_X \end{cases}$

$\forall\, V \subset \widehat{Y}$ aperto. V aperto (a) $\Rightarrow \widehat{f}^{-1}(V) = f^{-1}(V) \subset X$ aperto (a).

V aperto (b) $\Rightarrow K := \widehat{Y} - V = Y - V \subset Y$ compatto $\overset{\text{propria}}{\Longrightarrow}$

$\widehat{f}^{-1}(K) = f^{-1}(K) \subset X$ compatto $\Rightarrow \widehat{f}^{-1}(V) = \widehat{X} - f^{-1}(K)$ aperto (b). □

Cor. *$f : X \to Y$ omeomorfismo $\Rightarrow \widehat{f} : \widehat{X} \to \widehat{Y}$ omeomorfismo.*

Cor. *X compatto T_2, $a \in X$ t.c. $X_0 = X - \{a\}$ non compatto $\Rightarrow \widehat{X_0} = X$.*

Cor. $\widehat{\mathbb{R}}^n \cong S^n$, $\forall\, n \geqslant 1$.

Dim. $\mathbb{R}^n \cong S^n - \{a\} \Rightarrow \widehat{\mathbb{R}}^n \cong \widehat{S^n - \{a\}} = S^n$. □

Oss. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua.
$\lim_{x \to \infty} f(x) = a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists\, \tilde{f} : \widehat{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ estensione continua di f t.c. $\tilde{f}(\infty) = a$.

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow f$ propria $\rightsquigarrow \widehat{f} : \widehat{\mathbb{R}} \to \widehat{\mathbb{R}}$, $\widehat{f}(\infty) = \infty$.