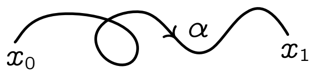
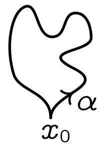
Cammini continui

Def. Un *cammino* continuo in uno spazio topologico X è un'applicazione continua $\alpha : I \to X$. $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha(1) = x_1$ sono gli *estremi* di α, x_0 *punto iniziale*, x_1 *punto terminale*, α cammino tra x_0 e x_1.
Un cammino $\alpha : I \to X$ è detto *cappio* se $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$ (*punto base*).

I cammini saranno sempre considerati continui.



Cappio costante. $x_0 \in X \rightsquigarrow \gamma_{x_0} : I \to X$, $\gamma_{x_0}(t) = x_0$, $\forall\, t \in I$.

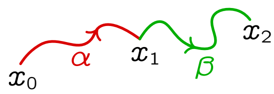


Concatenazione di cammini. $\alpha, \beta : I \to X$ cammini t.c.

$$\alpha(0) = x_0,\ \alpha(1) = \beta(0) = x_1,\ \beta(1) = x_2 \rightsquigarrow$$

$$\alpha * \beta : I \to X$$

$$(\alpha * \beta)(t) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2} \\ \beta(2t-1), & \dfrac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$



Oss. $\alpha \cdot \beta$ continua in $t = \frac{1}{2}$ perché $\alpha(1) = \beta(0)$.

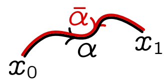
Def. $\alpha * \beta$ si chiama *concatenazione* di α e β.

Oss. α e β cappi $\Rightarrow$ $\alpha \cdot \beta$ cappio.

Cammino inverso. $\alpha : I \to X$ cammino t.c. $\alpha(0) = x_0$, $\alpha(1) = x_1 \rightsquigarrow$

$$\bar{\alpha} : I \to X$$

$$\bar{\alpha}(t) \overset{\text{def}}{=} \alpha(1-t)$$



Si ha $\bar{\alpha}(0) = x_1$ e $\bar{\alpha}(1) = x_0$.

Def. $\bar{\alpha}$ è detto *cammino inverso* di α.

Oss. α cappio $\Rightarrow$ $\bar{\alpha}$ cappio.

Spazi connessi per archi

Def. Uno spazio topologico X è *connesso per archi (cpa)* se $\forall\, x_0, x_1 \in X$ $\exists\, \alpha : I \to X$ cammino continuo t.c. $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha(1) = x_1$.

Teor. X *connesso per archi* $\Rightarrow$ X *connesso.*

Dim. Per assurdo X sconnesso $\rightsquigarrow X = U \cup V$ aperti non vuoti disgiunti. Scegliamo $x_0 \in U$, $x_1 \in V \rightsquigarrow \alpha : I \to X$ cammino t.c. $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha(1) = x_1 \Rightarrow 0 \in \tilde{U} := \alpha^{-1}(U)$, $1 \in \tilde{V} := \alpha^{-1}(V) \subset I$ aperti non vuoti disgiunti e $I = \tilde{U} \cup \tilde{V} \Rightarrow I$ sconnesso, contraddizione. $\square$

Teor. *$f : X \to Y$ continua suriettiva e X cpa $\Rightarrow$ Y cpa.*

Dim. $\forall\, y_0, y_1 \in Y \rightsquigarrow x_0 \in f^{-1}(y_0)$, $x_1 \in f^{-1}(y_1) \rightsquigarrow \alpha : I \to X$ t.c. $\alpha(0) = x_0$, $\alpha(1) = x_1 \rightsquigarrow \beta = f \circ \alpha : I \to Y$ t.c. $\beta(0) = y_0$, $\beta(1) = y_1$. $\square$

Cor. *$f : X \to Y$ continua e X cpa $\Rightarrow$ $f(X) \subset Y$ cpa.*

Oss. Immagine continua di un connesso per archi è connessa per archi.

Def. $U \subset \mathbb{R}^n$ è *convesso* se $\forall\, x_0, x_1 \in U \Rightarrow$ il segmento $[x_0, x_1] \subset U$.

Oss. $U \subset \mathbb{R}^n$ convesso $\Rightarrow$ U cpa. Infatti $\forall\, x_0, x_1 \in U \rightsquigarrow$

$$\alpha : I \to U$$
$$\alpha(t) = (1-t)x_0 + tx_1 \quad (\textit{combinazione convessa} \text{ di } x_0 \text{ e } x_1)$$

parametrizza il segmento $[x_0, x_1]$ quindi è un cammino in U tra x_0 e x_1.

Esempi.

1) Ogni intervallo $J \subset \mathbb{R}$ è convesso quindi cpa.

2) $\mathbb{R}^n - \{0\}$ cpa $\forall\, n \geqslant 2$. $\forall\, x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ se $[x_0, x_1]$ non passa per 0 determina un cammino. Se $[x_0, x_1]$ passa per 0 $\rightsquigarrow [x_0, x_2] \cup [x_2, x_1]$.

3) S^n cpa $\forall\, n \geqslant 1$. $f : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to S^n$, $f(x) = \frac{x}{\|x\|}$ continua e suriettiva.

4) $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ e $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ cpa $\forall\, n \geqslant 0$. $\pi : \mathbb{K}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{K}\mathrm{P}^n$ continua e suriettiva.

Lem. *X spazio topologico e $x_0 \in X$. X cpa $\Leftrightarrow$ $\forall\, x \in X$, $\exists\, \alpha : I \to X$ cammino t.c. $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha(1) = x$.*

Dim. $\boxed{\Rightarrow}$ Per definizione.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\forall\, x, y \in X \rightsquigarrow \alpha, \beta : I \to X$ cammini t.c. $\alpha(0) = \beta(0) = x_0$, $\alpha(1) = x$, $\beta(1) = y \Rightarrow \gamma := \bar{\alpha} * \beta : I \to X$ t.c. $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$. $\square$

Teor. *$X = \bigcup\limits_{i \in I} X_i$ con X_i cpa $\forall\, i \in I$ e $\bigcap\limits_{i \in I} X_i \neq \emptyset \Rightarrow X$ cpa.*

Dim. $x_0 \in \bigcap\limits_{i \in I} X_i$. $\forall\, x \in X \rightsquigarrow x \in X_i \rightsquigarrow$ cammino tra x_0 e x in $X_i \subset X$. $\square$

Componenti connesse per archi.

Def. Dato uno spazio X, la *componente connessa per archi* di $x \in X$ è

$$\mathcal{P}_x(X) \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{\substack{x \in P \subset X \\ P \text{ cpa}}} P$$

Teor. *Valgono le seguenti proprietà:*

1) *$x \in \mathcal{P}_x(X) \neq \emptyset$, $\forall\, x \in X$;*

2) *$\mathcal{P}_x(X)$ è il più grande sottospazio cpa di X che contiene x;*

3) *$\forall\, x, y \in X$, $\mathcal{P}_x(X) \cap \mathcal{P}_y(X) \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{P}_x(X) = \mathcal{P}_y(X)$;*

4) *$\mathcal{P}_x(X) \subset \mathcal{C}_x(X)$, $\forall\, x \in X$.*

Dim. Esercizio (simile al caso di $\mathcal{C}_x(X)$). $\square$

N.B. Le componenti cpa non sono necessariamente chiuse né aperte.

Def. $\mathcal{P}(X) \overset{\text{def}}{=} \{\mathcal{P}_x(X) \mid x \in X\}$ *insieme delle componenti connesse per archi di* X.

Oss. $\mathcal{P}(X)$ è una partizione di X in sottospazi disgiunti.

Oss. X cpa $\Leftrightarrow$ X ha un'unica componente cpa.

Def. Uno spazio topologico X è *localmente connesso per archi* se $\forall\, x \in X$, $\exists\, \mathcal{J}_x$ base di intorni aperti connessi per archi di x in X.

Oss. Loc. cpa $\Rightarrow$ loc. connesso.

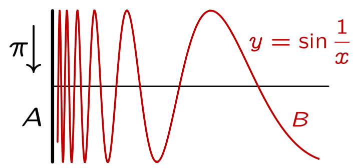
Teor. *X loc. cpa $\Rightarrow$ $\mathcal{P}_x(X) = \mathcal{C}_x(X)$ aperto e chiuso in X, $\forall\, x \in X$.*

Dim. $\forall\, y \in \mathcal{P}_x(X) \rightsquigarrow J \subset X$ intorno cpa di $y \Rightarrow J \subset \mathcal{P}_y(X) = \mathcal{P}_x(X)$ $\Rightarrow \mathcal{P}_x(X)$ aperto in X, $\forall\, x \in X$.

$X - \mathcal{P}_x(X)$ aperto $\Rightarrow \mathcal{P}_x(X)$ aperto e chiuso non vuoto in X quindi in $\mathcal{C}_x(X)$ (connesso) $\Rightarrow \mathcal{P}_x(X) = \mathcal{C}_x(X)$. □

Cor. *X loc. cpa $\Rightarrow$ X è unione topologica delle sue componenti cpa.*

Spazio connesso ma non connesso per archi.



$A = \{0\} \times [-1, 1]$ cpa

$B = \left\{\left(x, \sin\dfrac{1}{x}\right) \,\middle|\, x > 0\right\} \cong \,]0, +\infty[$ cpa

$X \overset{\text{def}}{=} A \cup B = \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^2} B \subset \mathbb{R}^2 \Rightarrow X$ connesso.
X non cpa, infatti se per assurdo $\alpha : I \to X$ cammino t.c.
$\alpha(0) = (0, 0)$, $\alpha(1) = (1, \sin 1) \Rightarrow \pi(\alpha(I)) = [0, a]$ con $a \geqslant 1 \Rightarrow$
α percorre infiniti max loc. $\Rightarrow \nexists \lim\limits_{t \to 0^+} \alpha(t) \Rightarrow \alpha$ non continua.
$\mathcal{P}(X) = \{A, B\}$, $\mathcal{C}(X) = \{X\}$.

Oss. X non è loc. connesso. I punti di A non hanno intorni connessi.